В. БЕЛЛЮСТИНЪ,
директоръ учительской семинаріи въ с. Поливановѣ.

МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ.

ЧАСТЬ III:

курсъ третьяго отдѣленія начальной школы.

Изданіе 5-е, печатанное съ измѣненіями съ 4-го, допущеннаго Ученымъ Комитетомъ М. Н. Пр. въ библіотеки учит. семинарій и низшихъ училищъ.

Цѣна 20 коп.







Того же автора: Ариѳметическій задачникъ, 4 выпуска, цѣна 12, 12, 15 и 12 коп.; Методика, годъ I, II, IV по 20 коп., и Дневникъ занятій по ариѳметикѣ 12 коп. „Какъ постепенно дошли люди до настоящей ариѳметики". Изд. 2-е, цѣна 75 коп.

ДѢЙСТВІЯ ВЪ ПРЕДѢЛѢ МИЛЛІОНА.

Нумерація

1. Порядокъ и предѣлъ изученія нумераціи. Нумерація до тысячи пройдена въ среднемъ отдѣленіи. Тысячею, собственно говоря, и заканчивается кругъ чиселъ, наиболѣе необходимыхъ въ обыкновенной житейской практикѣ. Дальнѣйшая нумерація болѣе интересна со стороны теоріи. Важно показать, что рядъ счетныхъ единицъ безграниченъ и что порядокъ ихъ образованія постоянно одинаковъ. Дѣти, мало привычныя къ отвлеченному мышленію и рѣдко встрѣчающіяся съ большими числами, слабо представляютъ себѣ разницу между высшими счетными единицами. Несмотря на постоянныя ссылки на предѣлъ тысячи, все-таки, чтобы не подавить дѣтей большимъ количествомъ новыхъ понятій, мы вводимъ новыя счетныя единицы лишь постепенно, а для сравненія ихъ пользуемся наглядностью. Изучая нумерацію постепенно, мы вводимъ сперва счетъ и обозначеніе чиселъ до 10 000, а затѣмъ уже счетъ и обозначеніе до 100 000. Что такое милліонъ,— объ этомъ можно поговорить во второе полугодіе, когда счетъ тысячами не будетъ затруднять дѣтей. Термины „билліонъ“, „трилліонъ“ и т. д. излишни для начальной школы, для крестьянскихъ дѣтей. Съ нихъ достаточно, если поймутъ, что рядъ чиселъ безграниченъ.

2. Наглядность. Лучшими пособіями при изученіи нумераціи надо признать торговые счеты, а также солому, о которой упомянуто во II вып. метод. на стр. 32. Это пособія простыя и дешевыя. Тысяча соломинокъ образуетъ пучокъ, діаметромъ приблизительно вершка въ 2—3. Десять такихъ пучковъ, слѣд. десятокъ тысячъ соломинокъ, даютъ пукъ почти такой же толщины, какую имѣетъ хорошій снопъ соломы. Нѣтъ нужды пересчитывать каждую тысячу.

Нѣсколько тысячъ у насъ пусть будетъ пересчитанныхъ, а остальныя съ такой же окружностью, какъ первыя. Впрочемъ, приготовить пучки могутъ и дѣти. Хорошо бы число десятковъ тысячъ довести до 10, т.-е. образовать сотню тысячъ.

3. Распредѣленіе единицъ по разрядамъ. Третій годъ школьнаго ученія допускаетъ бо́льшую систематизацію знаній, сравнительно съ первыми двумя. Въ виду этого, мы объясняемъ дѣтямъ, что и десятокъ, и сотню, и тысячу и т. д. называютъ единицей, такъ какъ десятокъ одинъ, сотня одна и т. д.; это единицы сложныя, какъ состоящія изъ простыхъ, напр. сотенный пучокъ состоитъ изъ отдѣльныхъ соломинокъ; единицы распредѣляются по разрядамъ, подобно тому, какъ книги по полкамъ, а ученики по мѣстамъ; къ 1-му разряду принадлежитъ простая единица, ко 2-му десятокъ, къ 3-му сотня и т. д.

4. Сравненіе единицъ. Счетъ въ предѣлѣ 10 000, а также и до 100 000, дается дѣтямъ безъ всякаго труда, такъ какъ здѣсь лишь продолжается то, что уяснено въ пред. 1000. Но сравненіе единицъ — нелегкая работа. Вотъ тутъ-то и нужна наглядность. Примѣръ: сколько сотенъ въ десяткѣ тысячъ? Отвѣтъ: въ 1 тысячномъ пучкѣ содержится сотенныхъ 10, да въ другомъ тысячномъ 10, да въ 3-мъ 10 и т. д., слѣд. въ 10 тысячныхъ пучкахъ содержится 10 разъ по 10, или 100 сотенныхъ пучковъ. Сравненіе единицъ необходимо для того, чтобы слова „десятокъ тысячъ“, „сотня тысячъ“ и т. п. не являлись для дѣтей пустыми звуками, въ которыхъ можно сбиваться, но чтобы съ этими словами были связаны опредѣленныя представленія, препятствующія смѣшенію понятій.

5. Письменное обозначеніе. Обозначеніе чиселъ выше тысячи вполнѣ основано на обозначеніи чиселъ до 1000. Дѣйств., если единица 1-го разряда, т.-е. простая единица, занимаетъ 1-е мѣсто справа, единица 2-го разряда — 2-е, 3-го — третье, то тысяча, единица 4-го разряда, должна занимать 4-е мѣсто и вообще всякая единица должна занимать такое мѣсто, къ какому разряду она принадлежитъ. Эта зависимость между номеромъ разряда и номеромъ мѣста должна быть объяснена дѣтямъ. Поэтому при выговариваніи написанныхъ чиселъ сперва пусть дѣти разбираютъ, на какомъ мѣстѣ стоятъ какія единицы, а потомъ — сколько этихъ единицъ. При письменномъ же обозначеніи чиселъ сперва пусть разлагаютъ числа на разряды и указываютъ, сколько имѣется единицъ каждаго разряда, на какомъ мѣстѣ долженъ писаться каждый

разрядъ, и тогда только пусть пишутъ одинъ разрядъ за другимъ, начиная съ высшаго.

Числа съ пропущепными разрядами, въ родѣ 12 007, 130 404 представляютъ особыя трудности. При выговариваніи и письмѣ ихъ необходимъ предварительный разборъ. Примѣръ: прочитать 50 607. Вопросы: „сколько написано цифръ?“ „какія?“ „какой разрядъ стоитъ на первомъ мѣстѣ справа?“—„Простыя единицы“.—„Сколько ихъ?“—„7“.—„Какой разрядъ на второмъ мѣстѣ?“—„Десятки.“—„Сколько ихъ?“—„Нѣтъ ни одного“. Далѣе разборъ, по этому же образцу, ведутъ сами дѣти. Число прочитывается: 5 десятковъ тысячъ 6 сотенъ 7, или 50 тысячъ шестьсотъ семь.

Другой примѣръ: написать число: триста пять тысячъ три. „На какіе разряды разложите это число?“ — „На 3 сотни тысячъ, 5 тысячъ, три простыхъ единицы.“ — „На которомъ мѣстѣ пишется каждый изъ этихъ разрядовъ?“ „Чѣмъ заполнить недостающія мѣста?“

Во всѣхъ болѣе трудныхъ примѣрахъ помогаетъ наглядность (пользованіе пучками соломы). Впрочемъ, про трудные примѣры можно сказать еще слѣдующее. Нумерація во всемъ ея объемѣ и со всѣми подробностями дается дѣтямъ не легко, такъ какъ предметъ ея, счетныя единицы, при наружномъ сходствѣ, рѣзко отличаются внутреннимъ содержаніемъ, т.-е. величиной. Но отъ дѣтей внутреннее содержаніе часто ускользаетъ, и они смѣшиваютъ счетныя единицы. Чтобы этого не случилось, нужно со стороны учениковъ значительное напряженіе мысли. Для облегченія вполнѣ возможно усвоивать нумерацію постепенно. Напр., болѣе трудные случаи съ пропущенными разрядами мы отложимъ до сложенія и вычитанія многозн. чиселъ, а теперь ограничимся нумераціей легкой, безъ нулей, хотя бы только съ четырехзначными и пятизначными числами. Важно усвоить начало, основаніе, а присоединить подробности и распространить основныя положенія не составитъ труда.

6. Нумерація на счетахъ. Въ третій годъ учащіеся уже подросли и развились, имъ теперь подъ силу дѣлать сравненія и выводы. Класть на счетахъ до 1 000 они умѣютъ. Остается распространить правило: если на 3-й проволокѣ кладутся сотни, то на 4-й единицы 4-го разряда, т.-е. тысячи, на 5-й единицы 5-го разряда, т.-е. десятки тысячъ и т. д.

Откладываніе на счетахъ во многомъ напоминаетъ письменную нумерацію. Порядокъ мѣстъ одинаковъ въ обоихъ случаяхъ. На

эту связь откладыванія и письма необходимо обратить вниманіе дѣтей. Чѣмъ болѣе будетъ сравненій, тѣмъ полнѣе пониманіе. Особенно хорошо, когда на сравненія наталкиваются сами дѣти и сами же ихъ излагаютъ: здѣсь уже чистая мысль, здѣсь нѣтъ механическаго запоминанія.

7. Дѣленіе разрядовъ на классы. Когда дѣти привыкнутъ къ разрядамъ, тогда можно поговорить и про классы. Сразу давать нѣсколько новыхъ терминовъ, притомъ такихъ, которые относятся къ довольно отвлеченнымъ понятіямъ, — вредно: можно подавить тяжестью слова, и тогда разорвется связь между словомъ и мыслью, а безъ этой связи слово принесетъ не прибыль, а убытокъ. Итакъ, о классахъ хорошо поговорить попозже, напр. во второе полугодіе. Какъ книги распредѣляются по полкамъ, а полки по шкапамъ, какъ ученики распредѣляются по мѣстамъ, а мѣста по классамъ, такъ и единицы распредѣляются по разрядамъ, а разряды по классамъ. Въ каждомъ классѣ 3 мѣста, 3 разряда. 1-е мѣсто принадлежитъ простымъ единицамъ, простымъ тысячамъ, простымъ милліонамъ, 2-е десяткамъ, 3-е сотнямъ.

Какъ отдѣлять классы одинъ отъ другого при письмѣ? Наиболѣе распространенный способъ — отдѣлять промежутками, напр. 15 625 700. Но въ первое время, для большей ясности, можно при выговариваніи ставить еще вспомогательныя точки, напр. такъ: 15· 625· 700.

Сложеніе и вычитаніе.

8. Повтореніе механизма. Обыкновенное письменное сложеніе и вычитаніе показано было уже въ пред. 1000. Здѣсь его остается повторить. Нельзя откладывать письменнаго производства дѣйствій до предѣла милліона, останавливаясь въ пред. 1000 только на устномъ вычисленіи: не успѣть за первое полугодіе III года выработать механизмъ, а второе полугодіе назначается уже для составн. имен. чиселъ.

Повтореніе письм. сложенія и вычитанія дѣти проведутъ, главнымъ образомъ, на примѣрахъ, которые они рѣшатъ и объяснятъ сами. Это отдѣлъ легкій, а помогать въ легкихъ отдѣлахъ настолько же излишне и вредно, насколько въ трудныхъ необходимо и полезно. Краткое правило, въ приложеніи къ примѣрамъ, должно имѣть цѣлью указать не второстепенныя подробности, въ родѣ разстановки цифръ, но основной ходъ, именно что дѣйствія производятся по разрядамъ.

9. Случай вычитанія, когда въ уменьшаемомъ нѣкоторыхъ разрядовъ нѣтъ. Иначе сказать: когда въ обозначеніи уменьшаемаго встрѣчаются нули, отдѣльно или подъ рядъ. Самое трудное — когда нули подъ рядъ. Примѣръ: 5 600 коп. — 3 945 коп. Дѣйствіе производимъ наглядно, на монетахъ. Уменьшаемое представляемъ въ видѣ 56 рублей. Занимаемъ 1 р., т.-е. сотню копеекъ; надъ цифрой 6 ставимъ точку; раздробляемъ 1 рубль въ гривенники, получаемъ 10 гривенниковъ, но такъ какъ копеекъ тоже нѣтъ, то 1 гривенникъ раздробляемъ въ копейки, останется 9 гривенниковъ; поэтому надъ нулемъ, обозначающимъ десятки, можно поставить для памяти цифру 9; надъ этимъ же нулемъ надо поставить и точку, такъ какъ гривенникъ занятъ для раздробленія въ единицы; далѣе, надъ нулемъ, обозначающимъ копейки, можно поставить для памяти 10; это тѣ копейки, которыя получились отъ раздробленія гривенника. Теперь вычесть возможно: 5 коп. изъ 10 коп., будетъ 5 коп.; 4 грив. изъ 9 грив, буд. 5 грив.; 9 руб. изъ 15 рубл. — 6 рубл.; 3 десятка рублей изъ 4 дес. рубл. — 1 дес. рубл.; всего 1 655 коп. Еще продѣлывается нѣсколько подобныхъ примѣровъ, пока дѣти не научатся самостоятельно ихъ рѣшать. Тогда слѣдуетъ выводъ: нуль безъ точки принимается за 10, а нуль съ точкой — за 9.

Солома также можетъ помочь въ рѣшеніи подобныхъ примѣровъ. Дано 40 006 — 12 359. Чтобы вычитаніе сдѣлать возможнымъ, беремъ одну изъ связокъ, которыя содержатъ по 10 000 соломинокъ. Ее развязываемъ, т.-е. раздробляемъ, получаемъ 10 отдѣльныхъ тысячъ. Одну тысячу занимаемъ, чтобы раздробить въ сотни, также занимаемъ 1 сотню, а потомъ 1 десятокъ. Надъ нулями, стоящими на мѣстѣ тысячъ, сотенъ и десятковъ, ставимъ точки, въ знакъ того, что единицу каждаго изъ этихъ разрядовъ мы занимали. На этомъ примѣрѣ опять подтверждается предыдущій выводъ, что нули, надъ которыми стоятъ точки, должны приниматься за 9.

Вотъ и все, что можно сказать про сложеніе и вычитаніе въ пред. милліона. Все остальное, всѣ существенныя указанія сдѣланы уже въ пред. 1 000.

Умноженіе.

10. Умноженіе на однозначное число. Этотъ случай разсмотрѣнъ во всей полнотѣ еще въ предѣлѣ тысячи. Нѣсколько повторительныхъ примѣровъ возобновятъ въ памяти дѣтей поря-

докъ вычисленія. Какъ примѣры повторительные, они не потребуютъ объясненій учителя, а будутъ изложены самими учащимися. Объясненіемъ теперь уже можно довольствоваться такимъ, которое выражаетъ механическое производство дѣйствія. Примѣръ: 7 386 $\times$ 7; объясненіе: „6 $\times$ 7 = 42, 8 $\times$ 7 = 56, да 4, 60; 3 $\times$ 7 = 21, да 6, 27; 7 $\times$ 7 = 49, да 2, 51; всего 51 702“. Иногда, чтобы провѣрить, сознательно ли усвоенъ порядокъ дѣйствія, учитель можетъ спросить: „чего это 21?“, „почему къ 49 прибавляете 2? и т. п.

Пріучая къ механическому производству дѣйствія и къ опредѣленному подписыванію чиселъ, мы не можемъ упустить изъ вида и такого порядка умноженія, когда множимое, множитель и произведеніе пишутся въ разныхъ мѣстахъ. Это то самое расположеніе, которымъ пользуются при дѣленіи многозначныхъ чиселъ, когда многозначнаго дѣлителя умножаютъ на разрядъ частнаго. Съ цѣлью помочь дѣленію, мы должны еще теперь поупражнять дѣтей въ такомъ вычисленіи, когда множимое, множитель и произведеніе пишутся не другъ подъ другомъ, а въ разныхъ мѣстахъ.

11. Умноженіе на счетную единицу и на разрядное число. Примѣры: 25 $\times$ 10, 25 $\times$ 100, 25 $\times$ 30, 25 $\times$ 300. Какъ рѣшать подобные примѣры, — было подробно объяснено въ пред. 1 000. Если дѣти забыли объясненіе, то мы повторимъ его опять-таки на малыхъ числахъ, опять въ томъ же направленіи, какъ ранѣе. На небольшихъ числахъ яснѣе виденъ выводъ правила, такъ какъ сущность правила не затемняется побочными вычисленіями. И вездѣ, гдѣ только безразлично, на какихъ числахъ вести объясненіе, выгодно вести объясненіе на числахъ сравнительно легкихъ.

Правило механическаго умноженія на разрядное число таково: „чтобы умножить на 20, 300, 4 000 и т. п., надо умножить на 2, 3, 4 и т. д., а потомъ приписать 1, 2, 3 нуля, смотря по тому, на какое число умножаемъ“. Это правило запоминается легко, но объясненіе его дается дѣтямъ съ трудомъ. Оно выводится изъ примѣровъ, которые предварительно должны быть объяснены такъ. Возьмемъ, хотя, 25 $\times$ 100: „20 $\times$ 100, будетъ 2 000, 5 $\times$ 100 = 500, всего 2 500“. Если бы спросили, почему 20 $\times$ 100 = 2 000, то надо сказать, что 10 $\times$ 100 = 1 000, да 10 $\times$ 100 = 1 000, всего 2 000. Но почему же 10 $\times$ 100 = 1 000? Это вытекаетъ изъ сравненія счетныхъ единицъ: во время изученія нумераціи каждая счетная единица должна была разлагаться на предшествующія ей, слѣд. и тысяча должна была разлагаться на десятки.

Теперь разберемъ 25×300. Объясненіе: „$25 \times 100 = 2\,500$, или 25 сотенъ; да еще $25 \times 100 = 25$ сотенъ; да еще получится 25 сотенъ; всего 3 раза по 25 сотенъ, 25 сот. $\times 3 = 75$ сот. $= 7\,500$“.

Подобныя объясненія особенно нужны для устнаго счета. При устномъ счетѣ едва ли удобно опираться на правило относительно приписыванія нулей. Представлять себѣ цифры при устномъ счетѣ неумѣстно. Во-первыхъ, въ нихъ можно сбиться. Во-вторыхъ, цифровое вычисленіе приводится обыкновенно къ письменному, механическому и отвлекаетъ поэтому отъ придумыванія искусственныхъ упрощающихъ путей. А это придумываніе такъ важно и съ теоретической и съ практической стороны.

Для облегченія устнаго счета въ примѣрахъ, подобныхъ взятымъ, вмѣсто того, чтобы представлять себѣ нули, можно еще пользоваться такими соображеніями. Требуется 15×800. Такъ какъ $15 \times 8 = 120$, то $15 \times 80 = 1\,200$, а $15 \times 800 = 12\,000$. Путемъ постепеннаго увеличенія множителя (8, 80, 800) мы восходимъ мыслью отъ легкаго, извѣстнаго отвѣта (120) къ трудному искомому (12 000).

12. Умноженіе на многозначное число. Чтобы научить умноженію на четырехзначное число, достаточно научить умноженію на трехзначное; но умножать на трехзначное очень легко, если усвоено умноженіе на двузначное число. Итакъ, прежде всего необходимо твердо поставить дѣло съ двузначнымъ множителемъ. Пока дѣти не въ состояніи безъ помощи учителя умножить на двузначное число, и думать нечего о трехзначномъ. Кажущееся однообразіе, именно однообразіе множителя, въ этомъ случаѣ, какъ и въ другихъ подобныхъ, не только не вредитъ, но совершенно необходимо. Разнообразіе тогда хорошо, когда оно, прежде всего, соотвѣтствуетъ силамъ учащихся. Однообразіе въ данномъ случаѣ можно простереть до того, что, не измѣняя множителя, перемѣнять только множимое до тѣхъ поръ, пока дѣти не научатся вполнѣ безошибочно умножать на одного выбраннаго множителя. Примѣръ:

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 56 \\ \hline 1\,458 \\ 12\,150 \\ \hline 13\,608 \end{array}$$

Объясненіе письменнаго производства можетъ быть такое: „$3 \times 6 = 18$, 8 пишемъ, 1 въ умѣ; $4 \times 6 = 24$, да 1, 25, 5 пишемъ, 2

въ умѣ; $2 \times 6 = 12$, да 2, 14, такъ и пишемъ; теперь умножаемъ на десятки; на мѣстѣ единицъ не забыть написать нуль; $3 \times 5 = 15$, 5 пишемъ, 1 въ умѣ; $4 \times 5 = 20$, да 1, 21, 1 пишемъ, 2 въ умѣ; $2 \times 5 = 10$, да 2, 12, такъ и пишемъ; всего 13 608. (Это объясненіе примѣрное. Его можно или распространить, выясняя, почему именно мы такъ дѣлаемъ вычисленіе, или же еще сократить и не упоминать о томъ, какъ пишутся цифры рязрядовъ произведенія.) Особенность подобнаго порядка состоитъ, какъ видно, въ томъ, что при умноженіи на десятки пишется на мѣстѣ единицъ нуль. Съ теченіемъ времени отъ этого нуля можно освободиться, объяснивши, что для цифры десятковъ достаточно того, что она стоитъ подъ десятками. Но на первыхъ порахъ этотъ нуль можетъ оказать хорошую услугу: онъ не допуститъ писать 2-е произведеніе прямо подъ первымъ, не отступая на одно мѣсто влѣво.

Еще небольшая практическая подробность. При двузначномъ множителѣ, дѣти смѣшиваютъ, на какой именно разрядъ они умножаютъ; не кончивши съ однимъ разрядомъ, начинаютъ умножать на другой. Въ предупрежденіе ошибки, полезно на то время, пока умножаютъ на единицы, цифру десятковъ закрывать (напр. клочкомъ бумаги), а при умноженіи на десятки закрывать цифру единицъ.

Когда умноженіе на двузначное число окончено, такъ что и на самост. работахъ ученики умѣло справляются съ этимъ дѣйствіемъ, переходимъ къ трехзначному множителю. Новая особенность одна: при умноженіи на сотни не забывать сперва приписывать два нуля, и только приписавши ихъ, умножать на число сотенъ.

13. Умноженіе на числа, имѣющія въ концѣ обозначенія нули. Примѣръ: $365 \times 2\,400$. Никакого умноженія на нуль не можетъ быть, такъ какъ умножить значитъ взять слагаемымъ нѣсколько разъ, а нуль показываетъ, что не надо брать слагаемымъ ни одного раза, т.-е. совсѣмъ не надо умножать. Отсюда видно, что старинныя выраженія, въ родѣ „нулью шесть", надо рѣшительно отвергнуть. Вотъ настоящее объясненіе подобныхъ примѣровъ: умножаемъ на 4 сотни; такъ какъ умножаемъ на сотни, то не забудемъ написать сперва 2 нуля; $5 \times 4 = 20$, 0 пишемъ, 2 въ умѣ; $6 \times 4 = 24$, да 2, 26, 6 пишемъ, 2 въ умѣ; $3 \times 4 = 12$, да 2, 14, такъ и пишемъ; умножаемъ теперь на 2 тысячи; пишемъ сперва 3 нуля; $5 \times 2 = 10$, 0 пишемъ, 1 въ умѣ; $6 \times 2 = 12$, да 1, 13, 3 пишемъ, 1 въ умѣ; $3 \times 2 = 6$, да 1, 7, такъ 7 и пишемъ; всего получаемъ 876 000. Дѣйствіе располагается такъ:

```
  365
 2 400
146 000
730 000
876 000
```

Относить нули множителя правѣе, такъ чтобы писать 4 подъ 5-ю,— не къ чему. И вообще выдѣлять этотъ случай изъ ряда другихъ умноженій нѣтъ достаточнаго основанія и явной выгоды. Дѣти должны понимать, что при всякомъ умноженіи на многозначное число они проходятъ, въ сущности, тотъ же путь. Именно, умножая 365 хотя бы на 2 456, они составляютъ вмѣсто 2 произведеній, какъ въ умноженіи 365 на 2 400, 4, при чемъ 3-е и 4-е произведеніе тѣ же самыя, что и въ нашемъ примѣрѣ. Лишніе нули можно будетъ опускать, когда получится достаточный навыкъ въ механизмѣ. Объ этомъ сказано въ предыд. §.

Дѣленіе.

14. Дѣленіе на однозначное число. Оно было пройдено во всей полнотѣ въ предѣл. 1 000. Тамъ былъ указанъ порядокъ и дано объясненіе. Вычисленіе при однозначномъ дѣлителѣ должно располагаться строкой, такъ какъ оно не принадлежитъ къ числу трудныхъ. Данныя числа записываются сразу всѣ, а отвѣтъ пишется по разрядамъ, по мѣрѣ того, какъ они получаются. Записывать промежуточные остатки, а тѣмъ болѣе писать всѣ вычисленія полностью, — не слѣдуетъ. Это значитъ вредить устному счету. Вотъ образецъ записи: 4 246 : 7 = 606 ост. 4. Подробная запись: 4246 : 7 = 606 мо-

```
4246 : 7 = 606
42
  46
  42
   4
```

жетъ быть допущена развѣ въ первое время, съ единственной цѣлью: показывать на ней примѣръ записыванія, съ тѣмъ, чтобы воспользоваться этимъ примѣромъ для многозначнаго дѣлителя.

15. Дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д. Нашъ предѣлъ, т.-е. предѣлъ выше тысячи, имѣетъ въ виду показать письменные механическіе пріемы дѣйствій. Поэтому и дѣленіе на счетную единицу

должно быть разсмотрѣно теперь съ точки зрѣнія письменнаго производства. Здѣсь указывается легкій порядокъ, по которому въ дѣлимомъ отчеркивается справа столько цифръ, сколько нулей въ дѣлителѣ. Правило это исключительно механическое. Запоминается оно легко. Но, вѣдь, мало его помнить, надо его понимать, т.-е. знать, какъ оно выводится. Для вывода можно воспользоваться обыкновеннымъ порядкомъ, т.-е. объяснять дѣленіе на 10, на 100 и т. д. такъ же, какъ и на всякаго однозначнаго или двузначнаго дѣлителя.

При устномъ вычисленіи этотъ письменный порядокъ непригоденъ. Мысленное отчеркиваніе цифры только повидимому облегчаетъ устный счетъ, только для тѣхъ, кто привыкъ къ цифровымъ выкладкамъ и не можетъ мыслить о числахъ при помощи словъ. Но кто, вычисляя устно, не представляетъ себѣ цифръ, тотъ очень скоро можетъ сосчитать и безъ нихъ.

Устное дѣленіе на 10, 100, 1 000 и т. д. основано на связи между счетными единицами. Примѣръ: 2 500 : 100. Это значитъ рѣшить вопросъ: сколько сотенъ въ 2 500? Рѣшеніе: въ тысячѣ сотенъ 10, слѣд. въ 2 тысячахъ 20, да въ 5-стахъ 5, всего 25. Еще примѣръ: 37 500 : 10, т.-е. надо узнать, сколько десятковъ въ 37 500. Рѣшеніе: въ 10 тысячахъ десятковъ 1 000, а въ 30 тысячахъ десятковъ 3 000; въ 7 000 десятковъ 700, да въ 500 — 50, всего 3 750.

Большую помощь оказываетъ въ подобныхъ примѣрахъ постепенное усложненіе дѣлимаго или дѣлителя. Именно, объяснить, почему въ 7 500 заключается 750 десятковъ, можно такъ: потому что въ 75 десятковъ 7, въ 750 десятковъ 75, а въ 7 500 десятковъ 750. Здѣсь мы быстро проходимъ рядъ дѣлимыхъ, изъ которыхъ каждое слѣдующее въ 10 разъ болѣе предыдущаго. Можно догадываться и такъ: въ 7 500 тысячъ 7, сотенъ 75, десятковъ 750. Въ этомъ случаѣ пользуемся лѣстницей изъ дѣлителей. Дѣти скоро поймутъ, какъ пользоваться подобной постепенностью, если давать имъ почаще для устнаго счета подобные ряды примѣровъ.

16. Дѣленіе на многозначное число. Этотъ видъ дѣленія считается самымъ труднымъ. Для него требуется знать все, что пройдено по ариѳметикѣ ранѣе. Въ дѣленіе входятъ всѣ 3 предыдущихъ дѣйствія. Пропускъ при изученіи этихъ дѣйствій отзывается непремѣнно и на дѣленіи. Но, обладая сложностью, требуя и вычитанія и умноженія, механизмъ дѣленія довольно однообразенъ. Въ этомъ

и заключается основное благопріятное обстоятельство. Еслп мы признаемъ однообразіе, то, значитъ, стоитъ разъ усвоить дѣленіе на наиболѣе легкомъ примѣрѣ, намъ потомъ останется только прилагать усвоенное къ другимъ болѣе труднымъ примѣрамъ, вводя ихъ постепенно, сообразно съ увеличивающейся трудностью. Удачный подборъ примѣровъ, полное усвоеніе примѣровъ одного рода и только при этомъ условіи переходъ къ другому роду,—вотъ необходимыя требованія, которыя надо выполнить, чтобы преодолѣть трудности дѣленія многозначныхъ чиселъ. При этомъ предполагается, что со стороны вычитанія и умноженія задержки не будетъ: если въ нихъ дѣти слабы, то ими и надо заняться, а дѣленіе пока отложить.

17. Дѣленіе на 2, 20, 21, 212 и т. п. Отъ удачнаго выбора дѣлителя зависитъ успѣхъ обученія дѣленію. Дѣлимое не такъ важно: надъ нимъ производится лишь вычитаніе, а дѣлителя надо умножать. Про дѣлимое скажемъ вообще: во всѣхъ послѣдующихъ объясненіяхъ мы беремъ лишь трехзначныя и четырехзначныя дѣлимыя. На нихъ объясненіе короче и понятнѣе; кромѣ того, если ученики самостоятельно могутъ раздѣлить четырехзначное число, то они не затруднятся 5-значнымъ, 6-значн. и т. д. Итакъ, сосредоточимъ все свое вниманіе на трехзн. и четырехзначномъ дѣлимомъ. Беремъ 476 : 2. (Если дѣти хорошо дѣлятъ въ предѣлѣ 1 000, то дѣлимое сразу можно взять четырехзначное). Легче дѣлителя 2-хъ не можетъ быть. Съ него и начинаемъ. Знанія, полученныя дѣтьми въ предѣлѣ 1 000 и, если нужно, то возобновленныя (см. § 14), достаточны для того, чтобы этотъ примѣръ рѣшенъ былъ ими безъ помощи учителя. Но если этого нѣтъ, то учитель поможетъ рѣшить примѣръ, дастъ другой подобный, поможетъ, пожалуй, рѣшить и его, наконецъ обязательно долженъ добиться того, чтобы дѣти сами могли дѣлить трехзначное число на 2.

Положимъ, мы этого достигли. Вмѣсто 2 дѣлимъ затѣмъ на 20. Дѣлимое можно оставить то же, т.-е. 476. Это даже лучше: по крайней мѣрѣ видно будетъ, что для дѣленія на 20 нужны почти тѣ же дѣйствія, что и для дѣленія на 2, что дѣленіе на двухзначное число сводится къ дѣленію на однозначное. Дѣленіе на 20 объясняемъ во всей полнотѣ, пишемъ вычисленіе безъ всякихъ пропусковъ, чтобы дать образецъ для послѣдующихъ примѣровъ. Для ясности и точности рѣчи придаемъ отвлеченному числу наименованіе; пусть будетъ такъ: 476 яблокъ раздѣлить 20 мальчикамъ. Первый вопросъ: „Что мы здѣсь сперва раздѣлимъ?“ — „47 десятковъ“.

Съ этого указанія перваго дѣлимаго начинается бесѣда. Первое дѣлимое должно быть указано сразу и безошибочно, должно быть отчеркнуто запятой. Дѣти должны привыкнуть къ этому отчеркиванію запятой настолько, чтобы потомъ учителю не приходилось давать длиннаго вопроса: „что мы сперва раздѣлимъ?“ а достаточно было бы напомнить: „отчеркни!“ (Замѣтимъ, что запятой полезно отчеркивать и дальнѣйщія цифры дѣлимаго, по мѣрѣ того, какъ ихъ сносимъ).

На вопросъ: „что мы сперва раздѣлимъ?“ ученики могутъ ошибочно сказать: или а) 4 сотни, или б) 476. На первое надо возразить: тогда каждый мальчикъ не получитъ ни поодной цѣлой сотнѣ. На второе сказать: ты хочешь дѣлить всѣ яблоки, но мы можемъ сперва раздѣлить десятки.

Итакъ, первое дѣлимое 47 дес. отчеркнуто. На каждаго изъ 20 мальчиковъ приходится по 2 дес. „Ск. же приходится на всѣхъ?“ — „40 дес.“ — „Ск. же десятковъ осталось неподѣленныхъ?“ — „7“. — „Какъ узналъ?“ — „47 — 40 = 7“. Число 40 подписывается подъ 47, производится вычитаніе. Остатокъ = 7 дес., да еще въ остаткѣ 6 ед., всего 76; 76 : 20 = 3 и 16 въ остаткѣ. Всего 23 и 16 въ остаткѣ.

Дѣйствіе располагается такъ:

$$\begin{array}{l} 476 : 20 = 23 \\ \underline{40} \\ \;\;76 \\ \;\;\underline{60} \\ \;\;16 \text{ ост.} \end{array}$$

Объясненіе и записываніе должно быть повторено на нѣсколькихъ подобныхъ примѣрахъ, въ которыхъ дѣлителемъ служитъ опять 20, а дѣлимымъ берется трехзначное или четырехзначное число. При этомъ четырехзначное дѣлимое лучше всего получить изъ трехзначнаго такъ: приписать еще цифру, напр. послѣ дѣленія 876 на 20 взять дѣленіе 8 765 на 20.

Когда дѣленіе на 20 достаточно понято, такъ что ученики въ состояніи справиться съ примѣрами этого дѣленія, беремъ дѣлителемъ 21 или 22. Дѣлимыя прежнія. 876 : 21. Отчеркиваемъ 87 десятковъ и дѣлимъ на 21. Частное то же, что и при дѣленіи на 20. Оно равно какъ разъ 8 : 2. Отсюда вытекаетъ: чтобы 87 раздѣлить на 21, стоитъ только 8 раздѣлить на 2. Такимъ образомъ, для дѣтей

становится яснымъ практическій пріемъ: надо въ дѣлителѣ закрыть всѣ цифры, кромѣ лѣвой, также и въ дѣлимомъ оставить лишь столько цифръ, чтобы въ нихъ могъ содержаться дѣлитель. Этотъ пріемъ мелочной, но практически важный. Ученики должны къ нему до того привыкнуть, чтобы достаточно было одного напоминанія „закрой!“ и они сейчасъ же закрывали, напр. рукой, всѣ цифры дѣлимаго и дѣлителя, кромѣ крайнихъ.

Дѣленіе на 21 или на 22 продолжается до тѣхъ поръ, пока не достигнемъ достаточнаго умѣнья производить это дѣйствіе сперва для трехзначныхъ дѣлимыхъ, а потомъ и для четырехзначныхъ. Можетъ-быть, придется пожертвовать 2—4 часами занятій съ дѣтьми, но зато, если они увѣренно будутъ дѣлить хотя на одного двузнаго дѣлителя, все остальное пройдетъ для нихъ легко. Такъ, если они умѣютъ дѣлить 6 434 на 21, то вполнѣ можно перейти къ 6 434 : 211. Важно, чтобы дѣлимыя были сходны. Тогда всякій предшествующій примѣръ служитъ наведеніемъ для послѣдующаго.

Для дѣленія на 211 пользуемся тѣми же дѣлимыми, что и для дѣленія на 21. Беремъ 6 434 : 211. Такъ же отчеркиваемъ первое неполное дѣлимое 643. Цифра частнаго получается отъ дѣленія 6 на 2; для этого въ 643 и въ 211 закрываемъ по 2 цифры справа; важно указать на то, что при дѣленіи на 211 первая цифра частнаго та же, что и при дѣленіи на 2, и что, слѣд., дѣленіе на 211 приводится къ дѣленію на 2. (Замѣтимъ, что если учащихся будетъ затруднять первая цифра частнаго, то сперва надо дать рядъ такихъ примѣровъ, гдѣ частное однозначное).

Итакъ, рядъ предыдущихъ примѣровъ научитъ дѣтей слѣдующему: a) отчеркивать въ дѣлимомъ такое число, которое при дѣленіи на дѣлителя давало бы однозначное частное; b) находить цифру частнаго, закрывая въ дѣлителѣ всѣ цифры, кромѣ одной крайней слѣва, а въ дѣлимомъ кромѣ одной или двухъ; c) умножать полученное частное на дѣлителя, чтобы находить число, которое мы подѣлили; d) вычитать найденное произведеніе изъ дѣлимаго, чтобы узнавать остатокъ, который еще не подѣленъ; e) сносить слѣдующую цифру дѣлимаго, чтобы образовывать слѣдующее неполное дѣлимое, и отчеркивать снесенную цифру.

18. Дѣленіе на 5, 50, 51, 52 и т. п. Рядъ примѣровъ, указанныхъ выще, долженъ быть пройденъ неспѣшно, съ соблюденіемъ полной постепенности въ усложненіи. Много настойчивости и вниманія требуется отъ учителя, много терпѣливости отъ учениковъ, чтобы

не разбросаться въ примѣрахъ. Дѣлимое пусть будетъ только трехзначное или четырехзначное, при чемъ изъ трехзначнаго получается четырехзначное приписываніемъ 4-го знака. Дѣлитель пусть измѣняется медленно: слѣдующій берется тогда, когда съ прежнимъ примѣры рѣшаются самостоятельно. Но, при всей терпѣливости, однообразные примѣры могутъ надоѣсть дѣтямъ. Да если бы они и не надоѣли, и тогда не мѣшало бы пройденное на одномъ рядѣ примѣровъ повторить на другомъ. Наиболѣе удобный, послѣ 2-хъ, дѣлитель, несомнѣнно, 5. Его таблица наиболѣе легкая. Вотъ рядъ примѣровъ для 5: „568 : 5, 568 : 50, 568 : 51, 5 687 : 51, 5 687 : 511". Если бы который-нибудь изъ этихъ примѣровъ не рѣшенъ былъ самостоятельно, то необходимо продѣлать его съ подробнымъ объясненіемъ, а потомъ давать подобные примѣры до тѣхъ поръ, пока этотъ родъ работы не сдѣлается для дѣтей совершенно легкимъ. Такъ, если ученики не раздѣлили сами 5 687 на 51, то вотъ еще имъ работа: 5 787 : 51, 5 787 : 52. Съ другой стороны, если счетъ идетъ быстро, то отъ предполагаемаго ряда возможны, конечно, отступленія: дѣлимое пятизначное, шестизначное, а дѣлитель 61, 71, 712, но только число, близкое къ круглымъ десяткамъ или сотнямъ.

Во время рѣшенія этихъ примѣровъ, когда, предполагается, механизмъ вычисленія сдѣлался дѣтямъ доступнымъ, умѣстно заняться общимъ выводомъ, что „остатокъ всегда долженъ быть менѣе дѣлителя". Для уясненія, учитель пользуется, положимъ, такой ошибкой дѣтей: при дѣленіи 759 на 51 они 1-ю цифру взяли вѣрно 1, но, дѣля остатокъ 249 на 51, взяли въ частномъ только 3, получили въ остаткѣ 99, взяли еще въ частномъ 1, всего написали въ частномъ 131. Здѣсь ошибка главнымъ образомъ вышла въ записываніи. „Чего это 1 (лѣвая цифра)?" — „Одинъ десятокъ" — „Чего 3?" — „3 единицы". — „Чего еще 1 (правая цифра)?" — „1 единица". — „Ск. всего десятковъ въ отвѣтѣ?" — „1" — „А единицъ?" — „3 да 1=4". Поэтому послѣднюю цифру 1 надо бы написать не рядомъ съ 3-мя, а подъ 3-мя, тогда отвѣтъ получился бы правильный. Но все-таки пришлось бы складывать 3 единицы съ 1 единицей. А чтобы складывать не приходилось, для этого надо умѣть находить разряды отвѣта сразу. Этого мы достигнемъ, если остатокъ будетъ всегда меньше дѣлителя: тогда не придется добавлять къ отвѣту еще нѣсколько единицъ того же разряда.

19. Дѣленіе на 35, 351, 46, 467 и т. п. Всѣ предыдущіе дѣлители выбирались съ такимъ расчетомъ, чтобы цифра частнаго опре-

дѣлялась прямо по крайнимъ цифрамъ дѣлимаго и дѣлителя, чтобы ее не приходилось измѣнять. Займемся теперь примѣрами, въ которыхъ частное опредѣляется сперва приближенно, затѣмъ подвергается повѣркѣ и иногда измѣняется, именно уменьшается. Требуется 678 раздѣлить на 35. Отчеркиваемъ неполное дѣлимое 67. Закрываемъ цифру 7. Закрываемъ въ дѣлителѣ цифру 5. Такъ какъ $6:3=2$, то казалось бы, что цифра частнаго 2. Но, умножая 2 на 35 (или 35 на 2, если примѣръ продѣлывается на отвлеченныхъ числахъ), получаемъ 70. Слѣд. по 2 десятка на каждую часть не придется, хватитъ только по одному десятку.

Подобныхъ примѣровъ можно рѣшить пока не особенно много. Они, все-таки, трудны для дѣтей. Лучше заняться болѣе легкими, чтобы въ простыхъ случаяхъ, гдѣ цифра частнаго находится сразу, поставить вычисленіе на твердую почву. Важно лишь дать учащимся понятіе о томъ, что цифра частнаго можетъ и не опредѣлиться сразу, а для ея вычисленія можетъ потребоваться нѣсколько попытокъ.

20. Дѣленіе на 19, 28, 492 и т. п. Эти дѣлители принадлежатъ къ 3-му и самому трудному роду дѣлителей. Въ нихъ единицы второго, считая слѣва, разряда являются въ количествѣ 9, 8, 7, такъ что составляютъ почти цѣлую единицу высшаго разряда. Напр., 19 можно принять за 2 десятка, 28 за 3 десятка, 492 за 5 сотенъ.

Для бесѣды съ дѣтьми диктуемъ примѣръ: $80:19$. Они его вычисляютъ самостоятельно, находятъ отвѣтъ 4. „Какъ найти отвѣтъ по правилу?“ „Читай, какое число дѣлимъ!“ „Закрой!“ Ученикъ закрываетъ цифру 0. „Читай!“ Тотъ читаетъ оставшееся число 8. „Закрой въ дѣлителѣ!“ Закрываетъ 9. „Читай!“ Читаетъ 1. „Сколько будетъ, если по правилу раздѣлимъ 8 на 1?“ — „8“. Этотъ отвѣтъ, оказывается, великъ, его постепенно уменьшаютъ, пока не доходятъ до 4. „Нельзя ли этотъ отвѣтъ 4 найти поскорѣе?“ „Слушайте: когда вы закрываете 9 и читаете десятокъ, то за какое число вы принимаете 19?“ — „за 10“. — „Но 19 ближе не къ одному десятку, а къ сколькимъ?“ — „Къ 2-мъ“. Это можно уяснить также и на какихъ-нибудь предметахъ. 19 отличается отъ одного десятка на 9, а отъ двухъ только на единицу. „Такъ за сколько десятковъ правильнѣе принимать 19?“ — „За 2 десятка“. — „За ск. принимать 29?“ „Почему?“ „За ск. 28, 27?“ — „За 3 дес., потому что 27 отличается отъ 30 только на 3, а отъ 20 на 7“. Рядъ подобныхъ примѣровъ придумываютъ затѣмъ дѣти.

Послѣ такого разъясненія, дѣлители, подобные указаннымъ, обязательно должны округляться, т.-е. замѣняться полными десятками, полными сотнями и т. п. Дается, напр., 17 985 : 69. Дѣти ставятъ запятую, получаютъ: 179, 85 : 69. „Читай!“ Закрывши 9, ученикъ читаетъ въ дѣлителѣ 7. „Читай въ дѣлимомъ!“ — „18“. (Удобнѣе читать сперва въ дѣлителѣ, потому что въ дѣлимомъ можетъ понадобиться 1 или 2 цифры, смотря по дѣлителю).

21. Дѣленіе на какое угодно многозначное число. Дѣленіе многозначныхъ чиселъ прошло до сихъ поръ 3 ступени. Сперва дѣлили на такія числа (20, 211), при которыхъ цифра частнаго узнается почти всегда сразу и перемѣнять ее не приходится. Затѣмъ разсмотрѣнъ былъ тотъ случай, когда частное можетъ оказаться больше, чѣмъ слѣдуетъ, и его надо понижать (дѣленіе на 24, 36 и т. п.). Наконецъ указанъ былъ способъ округленія дѣлителя, т.-е. замѣны его полными десятками, полными сотнями и т. п.

Примѣры перваго рода должны быть наиболѣе многочисленными до тѣхъ поръ, пока на нихъ не уяснится вполнѣ и не усвоится механизмъ дѣленія многозн. чиселъ. Лишь овладѣвши механизмомъ, дѣти съ пользой могутъ перейти къ примѣрамъ 2-го и 3-го рода.

Два навыка, которые хотя и относятся къ подробностямъ, но безусловно необходимы, должны получиться у всѣхъ дѣтей. Это, во-первыхъ, привычка отчеркивать запятой сразу то число, которое дѣлится. Во-вторыхъ, привычка опредѣлять частное по крайнимъ слѣва цифрамъ дѣлимаго и дѣлителя, а для этого закрывать всѣ цифры, кромѣ крайнихъ.

Идя въ такой постепенности, соблюдая подробности, останавливаясь на отдѣльныхъ видахъ дѣйствія до полнаго пониманія и усвоенія его дѣтьми, мы вначалѣ будемъ подвигаться тихо, но зато конецъ промелькнетъ незамѣтно и любой примѣръ будетъ вычисляться съ успѣхомъ.

Если бы въ трудномъ примѣрѣ, въ родѣ 427 690 : 7 789 потребовалась помощь учителя, то лучшее наведеніе — дать нѣсколько подготовительныхъ примѣровъ, расположенныхъ въ послѣдовательности. Вотъ соотвѣтствующій рядъ дѣленій: 427 : 7, 427 : 77, 4 276 : 77, 4 276 : 778, 42 769 : 778, 427 690 : 7 789.

22. Дѣленіе чиселъ, состоящихъ изъ сложныхъ единицъ. Пусть дѣлимое и дѣлитель состоятъ изъ чистыхъ сотенъ: 14 600 : 1 200. Если подобный примѣръ рѣшается письменно, то лучше всего воспользоваться обыкновеннымъ путемъ письм. механическаго дѣленія.

Отъ зачеркиванія нулей, какъ иногда дѣлаютъ, есть, конечно, и выгода, — сокращеніе письма; но есть и невыгода: остатокъ 2 въ этомъ примѣрѣ обозначаетъ сотни, а между тѣмъ, зачеркнувши нули, мы его какъ бы переводимъ въ простыя единицы; а это можетъ привести учащихся къ ошибкамъ. Если ужъ пользоваться этимъ способомъ, то лучше нули не зачеркивать, а подчеркивать.

Но при устномъ вычисленіи подобные примѣры допускаютъ очень полезное сокращеніе. Раздѣлить 14 600 на 1 200 значитъ узнать, сколько разъ 12 сотенъ содержатся въ 146 сотняхъ. 12 какихъ бы то ни было предметовъ или единицъ содержатся въ 146 такихъ же предметахъ или единицахъ 12 разъ (и 2 ед. въ остаткѣ). Поэтому, 12 сотенъ содержатся въ 144 сотняхъ 12 разъ и 2 сотни въ остаткѣ. Подобные, сокращающіе дѣло, способы устнаго счета надо особенно рекомендовать, какъ несомнѣнно развивающіе сообразительность.

23. Два случая дѣленія, именно дѣленіе на части и дѣленіе по содержанію, объединены были еще въ пред. 1 000. Тамъ еще ученики убѣдились, что, дѣлимъ ли мы на нѣсколько равн. частей, или дѣлимъ на опредѣленныя группы, числовой отвѣтъ одинъ и тотъ же. Теперь въ отвлеченныхъ примѣрахъ мы вполнѣ можемъ пользоваться общимъ выраженіемъ дѣленія, въ родѣ „120 раздѣлить на 10“, подразумѣвая подъ этимъ и дѣленіе на 10 равныхъ частей, и содержаніе („10 содержится въ 120“, „120 дѣлится на десятки“, „120 раздѣлить по 10-ти“).

При многозн. числахъ, когда только что объясняется механизмъ дѣйствія, много помогаютъ объясненію примѣры именованные. На нихъ, особенно когда идетъ дѣленіе на части, разсужденіе нагляднѣе и доступнѣе, чѣмъ на отвлеченныхъ примѣрахъ. Поэтому, при объясненіи дѣленія, лучше всего пользоваться примѣрами дѣленія на части, а не прибѣгать къ отвлеченному дѣленію. Хорошо брать короткія задачи, въ которыхъ требуется яблоки, огурцы (вообще то, что считается десятками, сотнями) раздѣлить поровну между нѣсколькими человѣками. Дѣленіе по содержанію можно вводить въ объясненіе изрѣдка, единственно съ тою цѣлью, чтобы дѣти не отвыкли имъ пользоваться. Но пониманію механизма оно помогаетъ гораздо слабѣе, чѣмъ задачи съ дѣленіемъ на части. Развѣ вотъ въ тѣхъ примѣрахъ оно хорошо, гдѣ дѣлимое и дѣлитель выражены сложными единицами (5 400 : 1 800, см. выше).

При рѣшеніи задачъ надо оба случая дѣленія точно различать,

надо указывать, къ какому именно роду принадлежитъ задача. Настаивая на опредѣленности, мы тѣмъ самымъ достигнемъ болѣе глубокаго пониманія задачъ.

Общіе выводы о дѣйствіяхъ надъ многозн. числами.

24. Цѣль изученія дѣйствій надъ числами выше 1000. Имѣть опредѣленную цѣль для каждаго изъ предѣловъ начальнаго курса ариѳметики совершенно необходимо. Безъ точнаго указанія цѣли обособленныя ступени теряютъ всякій смыслъ и основаніе. Предшествующій отдѣлъ, дѣйствія въ пред. 1 000, имѣлъ такую цѣль: перейти отъ исключительно устнаго счета къ письменному, отъ основныхъ пріемовъ вычисленія къ частнымъ, искусственнымъ; сравнить и согласовать всѣ тѣ способы, какими можно рѣшить данный числовой вопросъ. Предѣлъ тысячи можно назвать устно-письменнымъ. Предѣлъ же выше 1 000 слѣдуетъ признать исключительно письменнымъ, механически-письменнымъ. Въ немъ разрабатываются тѣ общепринятыя, строго установленныя формы письменнаго производства дѣйствій, безъ которыхъ нельзя быстро, вѣрно и легко справляться съ болѣе сложными вычисленіями. Искусство письменнаго счета, менѣе развивающее и менѣе полезное сравнительно со счетомъ устнымъ, обладающее чертами заученности, машинальности, все же совершенно необходимо для ученика, прошедшаго начальную школу: оно принадлежитъ къ тѣмъ немногимъ умѣніямъ, въ родѣ бѣглаго чтенія и разборчиваго письма, безъ которыхъ питомцу школы нельзя ступить шагу, не рискуя навлечь обвиненіе въ безграмотности.

Итакъ, письменное производство дѣйствій — главное содержаніе предѣла выше 1 000.

25. Объясненіе дѣйствій. Согласно такому взгляду на смыслъ этой ступени, дѣйствія должны объясняться кратко, точно и опредѣленно. Краткость требуется затѣмъ, чтобы дѣти имѣли готовую форму, твердо воспринятую памятью, пользуясь которой (т.-е. формой) они вычисляли бы быстро и вѣрно. Точность и опредѣленность этой формы ручается за легкость ея примѣненія. Образцы изложенія письменныхъ вычисленій даны, отчасти, выше. Приводимъ еще примѣры:

I.	$\begin{array}{r} 3\,265 \\ +\ 4\,389 \\ \hline 7\,654 \end{array}$	Ученикъ говоритъ: „5 да 9 14, 4 пишу, 1 въ умѣ, 6 да 8 14, да 1 15, 5 пишу, 1 въ умѣ; 2 да 3 5, да 1 6, пишу 6; 3 да 4 7, пишу 7; всего 7 654“.
II.	$\begin{array}{r} 7\,\dot{6}\dot{5}4 \\ -\ 3\,265 \\ \hline 4\,389 \end{array}$	Изложеніе: „5 изъ 14 9, 6 изъ 14 8, 2 изъ 5 3, 3 изъ 7 4; всего 4 389“.
III.	$\begin{array}{r} 389 \\ \times 24 \\ \hline 1\,556 \\ 7\,780 \\ \hline 9\,336 \end{array}$	„9 взять 4 раза, будетъ 36; 6 пишу, 3 въ умѣ; $8 \times 4 = 32$, да 3 35, 5 пишу, 3 въ умѣ; $3 \times 4 = 12$, да 3 15, пишу 15; пишу 0, такъ какъ умножаю на десятки; $9 . 2 = 18$, 8 пишу, 1 въ умѣ; $8 \times 2 = 16$, да 1 17, 7 пишу, 1 въ умѣ; $3 . 2 = 6$, да 1 7, такъ и пишу. Всего 9 336“.

IV. 9 336 : 24. „Отчеркиваю 93; $9:2=4$; много, такъ какъ $24 . 4 = 96$, а у насъ 93; беру 3; $4 . 3 = 12$, $2 \times 3 = 6$, да 17; 2 изъ 3 1, 7 изъ 9 2; сношу слѣдующую цифру 3, 213 раздѣлить на 24; $21:2=9$; много, 8; $4 . 8 = 32$, $2 . 8 = 16$, да 3 19; 2 изъ 3 1, 9 изъ 11 2; сношу слѣдующую цифру 6, 216 раздѣлить на 24; $21:2=9$; $4 . 9 = 36$; $2 . 9 = 18$, да 3 21; вѣрно: 9. Всего 389“.

Объясненія механическаго производства дѣйствій должны быть довольно однообразны. Выражаясь приблизительно въ однихъ и тѣхъ же словахъ, въ одной и той же послѣдовательности, они тѣмъ легче запоминаются и тѣмъ скорѣе приводятъ къ опредѣленному навыку въ письменномъ вычисленіи. Подобно тому, какъ таблица умноженія запомнится тѣмъ легче и скорѣе, чѣмъ короче и однообразнѣе выражены словами ея строки, такъ и изложенія производства 4 дѣйствій при краткости и опредѣленности только выигрываютъ.

26. Правила дѣйствій. Правила производства дѣйствій надъ многозн. числами, выраженныя растянуто, въ отвлеченной формѣ, иногда тяжелымъ языкомъ, — нежелательны. Представляя готовый выводъ, трудный по своей многосложности, они разсчитаны бываютъ часто не на разумное усвоеніе, а на запоминаніе. Дѣтьми дѣлаются попытки къ запоминанію, длинныя и утомительныя, запоминаются отрывки, иногда второстепенные; если же и все правило, то оно вскорѣ забывается, особенно по выходѣ изъ школы.

Мѣсто отвлеченныхъ растянутыхъ правилъ должны занять изложенія производства 4-хъ дѣйствій, примѣненныя къ примѣрамъ (образцы см. въ предыд. §). Эти изложенія болѣе доступны, какъ оп-

рающіяся на примѣры. Они болѣе требуютъ пониманія и менѣе заучиванія, такъ какъ съ перемѣной примѣра измѣняется и изложеніе. Подобныя изложенія должны быть признаны обязательными для всѣхъ дѣтей.

27. Необходимость сознательности при механ. производствѣ письм. вычисленій. Ученикъ, изучающій дѣйствія надъ числами выше тысячи, имѣетъ въ виду пріобрѣсти навыкъ въ письм. вычисленіяхъ; онъ запоминаетъ опредѣленный порядокъ этихъ вычисленій и усвоиваетъ образцы, по которымъ ему слѣдуетъ излагать ходъ этихъ вычисленій. Но при всемъ стремленіи къ пріобрѣтенію навыка и къ запоминанію принятаго порядка, забота о сознательности, о пониманіи не можетъ быть никоимъ образомъ отодвинута на задній планъ.

Во-первыхъ, во время выработки навыка, учитель долженъ постоянно давать вопросы: почему пишете тамъ, а не здѣсь? какія единицы обозначаетъ та или другая цифра? Чѣмъ отличается письменный способъ отъ устнаго или отъ какого-либо частнаго, искусственнаго? также и нѣкоторые другіе вопросы, пригодные для того, чтобы будить мысль, сосредоточивать умственную дѣятельность не столько на простомъ запоминаніи, сколько на сужденіи.

Во-вторыхъ, когда достаточный навыкъ въ письменномъ производствѣ будетъ пріобрѣтенъ, напр. во второе полугодіе послѣдняго года, слѣдуетъ вывести этотъ навыкъ изъ его безразличнаго состоянія, изъ его одинаковаго отношенія ко всѣмъ примѣрамъ. Пусть дѣти всматриваются въ данную имъ работу, изыскиваютъ различныя упрощенія примѣнительно къ даннымъ примѣрамъ, отступаютъ, въ видахъ удобства, отъ усвоеннаго механическаго способа. Тогда, кромѣ примѣненія того, что они запомнили и что запомнить имъ необходимо, т.-е. кромѣ примѣненія опредѣленнаго порядка письмен. вычисленій, опять будетъ возбуждена ихъ догадка и будетъ дѣйствовать ихъ сообразительность. Примѣръ: $1\,512 \times 8$. Всматриваясь во множимое, разлагаемъ его на 15 сотенъ и 12 ед. Множимъ обѣ группы отдѣльно: 15 сот. $\times\, 8 = 120$ сот., $12 \times 8 = 96$, всего 12 096. Но, повторяемъ, отступленія отъ установленнаго образца письменныхъ вычисленій, какъ способы искусственные, умѣстны тогда, когда усвоены способы основные. При такомъ условіи отступленія крайне желательны и ихъ слѣдуетъ поощрять.

28. Термины. Общеупотребительные термины, относящіеся къ дѣйствіямъ, умѣстно сообщить именно здѣсь. Теперь заканчиваются свѣ-

денія, касающіяся отвлеченныхъ чиселъ. Обременять дѣтей массой терминовъ вредно; скорѣе надо быть осторожнымъ, скупымъ на нихъ. Терминъ, какъ и всякое слово, имѣетъ цѣну тогда, когда онъ нуженъ. А нуженъ онъ можетъ быть для того, чтобы удобнѣе различать или предметы, или понятія, главное послѣднія. Въ такомъ случаѣ терминъ является завершеніемъ образованія понятія. Отсюда вытекаетъ, что терминъ надо сообщать тогда, когда созрѣваетъ соотвѣтствующее понятіе.

29. **Опредѣленія.** Въ старыхъ учебникахъ играли большую роль такъ наз. опредѣленія. Ими предполагалось выразить сущность каждаго изъ ариѳметическихъ дѣйствій. Примѣръ: „дѣленіемъ наз. такое ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго одно изъ данныхъ чиселъ разлагается на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ“.

Подобныя опредѣленія обладаютъ двумя недостатками, которыхъ мы должны избѣгать. Во-первыхъ, они выражены многословно, тяжелымъ языкомъ. Во-вторыхъ, многія изъ нихъ объясняютъ то, что и такъ ясно, а поэтому, подъ видомъ объясненія, довольствуются простой перестановкой словъ или замѣной однихъ словъ другими, не болѣе ясными.

Въ виду этого, нѣтъ никакого основанія опредѣлять то, что само собой ясно, а также облекать опредѣленія въ многословную, тяжелую форму. Желательно держаться такихъ опредѣленій: „сложить два числа все равно, что къ одному присчитать другое“, „вычесть значитъ отнять“, „умножить значитъ взять слагаемымъ“, „дѣленіемъ мы узнаемъ часть числа, а также, сколько разъ одно число содержится въ другомъ“. Подобныя легкія, простыя опредѣленія могутъ быть усвоены на разбираемой нами ступени.

30. **Устный счетъ.** Обыкновенные пріемы устнаго счета изложены были въ пред. 100. Они распространены и дополнены частными пріемами въ пред. 1 000. При письменномъ производствѣ дѣйствій они отступаютъ на второй планъ, но только на нѣкоторое время. Именно, надо дать ученикамъ время и возможность твердо усвоить порядокъ письменныхъ вычисленій. Въ этотъ промежутокъ устный счетъ надо вести отдѣльно, на особыхъ примѣрахъ. Вести же его необходимо, иначе навыкъ въ устномъ счетѣ понемногу начнетъ утрачиваться, вмѣсто того, чтобы развиваться.

Но когда дѣти укрѣпятся въ способахъ письменнаго вычисленія, тогда оба вида счета, и устный и письменный, должны итти рука

объ руку, смѣшиваться одинъ съ другимъ и дополнять другъ друга. Дается ли напр. задача,—тогда въ ней нѣкоторыя строки пусть рѣшаются письменнымъ пріемомъ, а тѣ, которыя возможно, пусть вычисляются устно. Или дается дѣленіе многозн. числа на двузначное. Здѣсь всѣ промежуточныя вычисленія, въ родѣ нахожденія цифры частнаго, умноженія дѣлителя на частное, вычитанія, могутъ съ успѣхомъ производиться устно, подписывать достаточно только готовыя числа, напр. готовое произведеніе, готовое частное. Вообще, когда механическій пріемъ вычисленія усвоенъ, въ него при всякомъ случаѣ надо вставлять устный счетъ: и вычисленіе пойдетъ скорѣе, и устный счетъ будетъ совершенствоваться.

31. Объемъ устныхъ вычисленій въ начальной школѣ. Заканчивая теперь рѣчь о дѣйствіяхъ надъ отвлеченными числами, подведемъ итогъ требованіямъ устнаго счета. Какого умѣнья высчитывать устно мы въ правѣ пожелать отъ питомца начальной школы, кончающаго курсъ? Укажемъ возможно точныя рамки:

I. Всѣ дѣйствія въ пред. 100 должны производиться чисто устнымъ путемъ, безъ всякихъ вспомогательныхъ записей. Записывать данныя числа и отвѣтъ можно тогда, когда отвѣтъ уже вычисленъ устно.

II. Вычисленія въ пред. 1 000 нельзя относить къ обязательно устнымъ. Желательно, чтобы они производились устно, но не обязательно. Въ случаѣ затрудненія, ученикъ можетъ записать данныя числа и отвѣтъ и тѣмъ облегчить себѣ работу. Это единственная, хотя и важная уступка, которую мы можемъ сдѣлать вычисленіямъ въ пред. 1 000. Во всемъ остальномъ они должны слѣдовать устнымъ пріемамъ.

III. Всѣ дѣйствія надъ сложными единицами, приводящіяся къ дѣйствіямъ въ пред. 100, требуютъ устнаго счета. Примѣры: a) $2\,800 + 1\,500$ приводится къ сложенію 28 сотенъ съ 15 сотнями, b) $35\,000 - 16\,000$, все равно, что 35 тыс.—16 тыс., c) $140\,000 \times 7 = 14$ дес. тыс. $\times 7$. d) $12\,000 : 2 = 12$ тыс. : 2; $12\,000 : 6\,000 = 12$ тыс. : 6 тыс. Эти примѣры приводятся къ такимъ дѣйствіямъ въ предѣлѣ 100 : $28 + 15$, $35 - 16$, 14×7, $12 : 2$, $12 : 6$; поэтому они могутъ быть рѣшены устно.

IV. Дѣти должны быть знакомы съ частными пріемами устнаго счета (см. вып. II § 93) и должны прилагать ихъ во всѣхъ возможныхъ случаяхъ.

V. Наконецъ, существуютъ особо благопріятныя вычисленія, въ которыхъ запоминать приходится мало и которыя поэтому мало

нуждаются въ записываніи. Примѣръ: 66 666 + 33 333. — Устный счетъ основанъ вообще и на соображеніи, и на памяти. Соображеніе необходимо для того, чтобы прилагать искусственные, легкіе пріемы счета. Память же важна тѣмъ, что даетъ возможность удерживать въ головѣ данныя числа и отвѣтъ, а также промежуточные результаты. Въ виду этого, тѣ примѣры, которые не требуютъ исключительной сообразительности и не обременяютъ памяти, удобны для устнаго счета. Возьмемъ такой примѣръ: 555 × 12. Здѣсь опять встрѣчаемся съ доступнымъ устнымъ вычисленіемъ, такъ какъ числа запоминаются безъ труда: 500 × 12 = 6 000, 50 × 12 = 600, 5 × 12 = 60, всего 6 660.

32. Измѣненія суммы, разности, произведенія и частнаго. Относящіяся сюда правила въ общей отвлеченной формѣ превышаютъ силы начальной сельской школы, поэтому скучны для дѣтей, заучиваются ими на память и приносятъ, при такихъ условіяхъ, одинъ только вредъ. Научную форму, умѣстную въ руководствахъ для среднихъ учебныхъ заведеній (напр., „если мы уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличимъ или уменьшимъ на одинаковое число единицъ, то разность останется безъ измѣненія“), начальная методика должна отвергнуть. Но пониманіе подобныхъ свойствъ, примѣнительно къ устнымъ вычисленіямъ, содѣйствуетъ облегченію устнаго счета; при устныхъ же примѣрахъ возможно и объясненіе этихъ свойствъ, въ доступныхъ выраженіяхъ. Напр., при сложеніи и вычитаніи весьма желательно округленіе чиселъ, въ родѣ замѣны 198 черезъ 200, а это округленіе и основано на скрытыхъ измѣненіяхъ суммы и разности. На подобныхъ же измѣненіяхъ основаны и выкладки на счетахъ, когда, напр., вмѣсто отниманія 8, мы отнимаемъ 10 и прибавляемъ къ остатку 2. Отнимая 10 вмѣсто 8, мы увеличиваемъ вычитаемое на 2, отъ этого разность уменьшается на 2; чтобы получить вѣрную, надо прибавить къ полученной разности 2.

33. Записываніе вычисленій. Всѣ вычисленія въ пред. 100 должны записываться строкой, притомъ уже послѣ того, какъ они произведены. Этимъ изощряется умѣнье считать устно. Дѣйствія до 1 000 допускаютъ вспомогательное записываніе данныхъ чиселъ и отвѣта; записываніе идетъ тоже строкой, столбецъ же умѣстенъ только въ томъ случаѣ, когда на трехзначныхъ числахъ, какъ на самыхъ доступныхъ, уясняется механизмъ письм. производства. Числа выше 1 000 требуютъ, вообще говоря, записыванія дѣйствій

столбцомъ, такъ какъ здѣсь начинается область вычисленій чисто письменныхъ. Но и въ ней встрѣчаются примѣры, удобные для устнаго счета. Къ нимъ опять примѣнимо записываніе строкой. Поэтому общее правило для чиселъ выше 1 000 таково: легкія вычисленія писать строкой, а трудныя столбцомъ.

Подписываніе одинаковыхъ разрядовъ въ одномъ вертикальномъ столбцѣ — подробность, хотя и второстепенная, но практически важная. Безъ полной аккуратности въ этомъ подписываніи нельзя будетъ избавиться отъ большихъ задержекъ въ вычисленіяхъ.

34. Связь между дѣйствіями. И въ предыдущіе 2 года, но въ 3-й въ особенности, учителю надо заботиться о томъ, чтобы связь между отдѣлами ариѳметики была ясна для дѣтей. Имѣя въ виду эту цѣль, авторы нѣкоторыхъ методикъ совѣтуютъ, между прочимъ, проходить дѣйствія попарно, т.-е. сложеніе вмѣстѣ съ вычитаніемъ, а умноженіе вмѣстѣ съ дѣленіемъ. Это было бы хорошо, если бы механизмъ прямого дѣйствія былъ болѣе сходенъ съ механизмомъ обратнаго. Но такъ какъ они въ значительной мѣрѣ расходятся, то лучше сперва изучить прямое дѣйствіе, т.-е. сложеніе или умноженіе, затѣмъ обратное, вычитаніе или дѣленіе, и тогда уже сопоставить прямое съ обратнымъ, т.-е. сложеніе съ вычитаніемъ, а умноженіе съ дѣленіемъ. Такое сопоставленіе удается на особо подобранныхъ примѣрахъ и приводитъ къ выводу, напр., относительно чиселъ при сложеніи и вычитаніи, такому: если отъ суммы 2 чиселъ отнимемъ первое число, то въ остаткѣ получимъ второе.

Этотъ выводъ имѣетъ скорѣе теоретическую цѣну, чѣмъ практическую примѣнимость. При повѣркѣ дѣйствій имъ почти не пользуются. Дѣйств., гораздо легче провѣрить, передѣлавши вычисленіе снова, такъ какъ въ это время можно ошибку не только обнаружить, но и поправить. Нѣсколько примѣровъ на связь между сложеніемъ и вычитаніемъ продѣлать необходимо. И вообще пріучать дѣтей къ повѣркѣ, какой бы то ни было, хотя бы къ простѣйшей, надо непремѣнно: это развиваетъ привычку къ точности и вселяетъ должную увѣренность въ своихъ силахъ.

Простѣйшія дроби.

35. Распредѣленіе курса дробей по годамъ. Благодаря доступности и практической важности простѣйшихъ дробей, ихъ мѣсто — во всѣ 3 года обученія. При такомъ порядкѣ и тѣ дѣти,

которыя не дойдутъ до конца школьнаго курса, все-таки, покидая школу, уйдутъ изъ нея съ нѣкоторымъ знаніемъ долей. Кромѣ того, вводя дроби постепенно, понемногу, среди цѣлыхъ чиселъ, мы даемъ возможность представленіямъ о доляхъ окрѣпнуть, войти въ связь съ понятіемъ о цѣлыхъ числахъ.

Понятіе о половинѣ мы даемъ впервые въ пред. 10-ти, при дѣленіи нечетныхъ чиселъ пополамъ; понятіе о четверти въ пред. 20. Вычисленія съ ними пока исключительно наглядныя и устныя. Во второй годъ, въ пред. 100, кромѣ 1 четверти, вводятся еще 2 четверти и 3 четверти, а также доли восьмыя. Всѣ эти доли сравниваются между собою; дается письменное обозначеніе: $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^3/_4$ и т. д. Въ пред. 1 000 присоединяются дальнѣйшія нетрудныя доли, въ родѣ третей, пятыхъ, десятыхъ. Въ третій годъ обученія повторяется, объединяется и отчасти распространяется то, что усвоено было въ первые два года. Распространеніе касается другихъ употребительныхъ долей, напр. шестыхъ, сотыхъ, оно приводитъ къ дѣленію любого числа на другое данное число и заканчивается обозначеніемъ десятичныхъ долей.

36. Соотношеніе между долями и составными именованными числами. Дѣйствія надъ дробями напоминаютъ во многомъ дѣйствія надъ составными именов. числами: пудъ мы можемъ раздробить въ фунты, а единицу въ четверти (четвертыя доли); изъ 48 часовъ получается 2 сутокъ, а изъ 16 восьмушекъ получается 2 цѣлыхъ единицы. Всякую дробь можно считать простымъ именованнымъ числомъ: $^3/_8 = 3$ восьмушкамъ. Всякое смѣшанное дробное число можно считать составнымъ именованнымъ числомъ съ 2 наименованіями: $2\frac{3}{4} = 2$ ед. + 3 четв., все равно, какъ 2 пуд. 30 фунт. = 2 п. + 30 ф. Вотъ эта связь между дробями и именов. числами позволяетъ дѣйствія надъ дробями разсматривать, какъ дѣйствія надъ составными именов. числами. А такъ какъ изъ дробей образуются составныя именов. числа не болѣе, какъ двухъ наименованій, то и дѣйствія надъ дробями мы предпосылаемъ дѣйствіямъ надъ составными именов. числами, въ которыхъ можетъ встрѣтиться болѣе двухъ наименованій, напр. 2 п. 30 ф. 12 лот. 1 зол. — 4 наименованія.

37. Происхожденіе дробей отъ дѣленія. Самый простой и доступный для дѣтей способъ получить дробь — это раздѣлить единицу на нѣсколько равныхъ частей. Для этого беремъ яблоко, листъ бумаги, фунтъ чаю, аршинъ. Эти единицы имѣютъ опредѣ-

ленный размѣръ, у нихъ могутъ быть доли, но сами онѣ долями другихъ величинъ могутъ быть представлены лишь при большой работѣ воображенія. Бруски дробныхъ счетовъ — единицы менѣе удобныя. Доли этихъ брусковъ — условныя, такъ какъ половина бруска служитъ половиной лишь относительно цѣлаго бруска; спрячьте цѣлый брусокъ, и бывшую половину никто не затруднится назвать цѣлымъ брускомъ. Не то съ яблокомъ: удаливши цѣлое яблоко, мы половину яблока никакъ не назовемъ цѣлымъ. Вотъ подобныя единицы, которыя представляются дѣтямъ всегда въ опредѣленной формѣ, имѣютъ преимущество предъ единицами менѣе опредѣленными, какъ и всякая наглядность непосредственная имѣетъ преимущество передъ наглядностью условной.

Итакъ, первоначальныя понятія о доляхъ должны быть образованы на единицахъ опредѣленныхъ. Затѣмъ можно пользоваться единицами менѣе опредѣленными и наконецъ уже находить доли чиселъ. Разберемъ примѣръ: 4 : 15. Переводимъ дѣло на какую-нибудь прикладную задачу, хотя на такую: „4 одинаковыхъ хлѣба разрѣзать поровну на 15 человѣкъ“. Рѣжемъ 1-й хлѣбъ, на каждаго придется по $^1/_{15}$ хлѣба; рѣжемъ 2-й, на каждаго человѣка придется опять по $^1/_{15}$ хлѣба, также и отъ 3-го и отъ 4-го хлѣба достанется по $^1/_{15}$; всего каждый человѣкъ получитъ $^4/_{15}$ хлѣба. Если бы требовалось раздѣлить 64 на 15, то мы раздѣлили бы особо 60 на 15, будетъ по 4, потомъ 4 на 15, будетъ по $^4/_{15}$, всего по $4^4/_{15}$. Такимъ образомъ мы нашли $^1/_{15}$ долю числа 4 и 64.

38. Наглядное сравненіе простѣйшихъ дробей. Для половины, четверти и восьмушки лучше всего пользоваться листомъ бумаги. Если мы раздѣлимъ его на восьмушки, то увидимъ, что восьмыхъ долей въ единицѣ восемь, за это и доля называется восьмой. $^2/_8 = {}^1/_4$; четвертей въ цѣломъ четыре; $^3/_8 = {}^1/_4 + {}^1/_8$; $^4/_8 = {}^2/_4 = {}^1/_2$; $^5/_8 = {}^1/_2 + {}^1/_8$; $^6/_8 = {}^3/_4$; $^7/_8 = {}^3/_4 + {}^1/_8 = 1 - {}^1/_8$.

Сравненіе трети и шестой можно вести, напр., на сажени. Если сажень раздѣлена на аршины, то имѣемъ трети, если еще на поль-аршины, то имѣемъ и шестыя. Шестыхъ въ единицѣ 6; $^2/_6 = {}^1/_3$; третей въ единицѣ три; $^3/_6 = {}^1/_2 = {}^1/_3 + {}^1/_6$; $^4/_6 = {}^2/_3 = {}^1/_2 + {}^1/_6$; $^5/_6 = {}^2/_3 + {}^1/_6 = 1 - {}^1/_6$. Такимъ образомъ послѣдовательно $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$ и т. д. сравниваются съ единицей, половиной и третью.

Такъ же идетъ разборъ пятыхъ и десятыхъ долей. $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ и т. д. сравниваются съ пятой долей и половиной. Получаются

строки: $^2/_{10} = {^1/_5}$; $^3/_{10} = {^1/_5} + {^1/_{10}}$; $^4/_{10} = {^2/_5}$; $^5/_{10} = {^1/_2} = \frac{2}{5} + {^1/_{10}}$; $^6/_{10} = {^3/_5} = {^1/_2} + {^1/_{10}}$; $^7/_{10} = {^1/_2} + {^1/_5}$; $^8/_{10} = {^4/_5} = {^1/_2} + {^3/_{10}}$; $^9/_{10} = {^1/_2} + {^2/_5} = 1 - {^1/_{10}}$. Для наглядности можно воспользоваться монетами: рублемъ, двугривенными ($^1/_5$ р.) и гривенниками ($^1/_{10}$ рубля).

39. Раздробленіе единицъ и долей въ доли. Какъ мѣры высшаго наименованія раздробляются въ мѣры низшаго, такъ и крупныя доли (и цѣлыя единицы) въ мелкія доли. Раздробить 2 лота въ золотники все равно, что раздробить 2 лота въ третьи доли. Чтобы раздробить менѣе употребительныя доли, напр. 25-ыя въ 50-ыя, дѣти должны понимать, что изъ каждой 25-ой выходитъ 2 50-ыхъ доли. Что это такъ, дѣти могутъ видѣть, напр., на рублѣ: въ немъ $^1/_{25} = 4$ коп., $^1/_{50} = 2$ коп. На раздробленіи крупныхъ долей въ мелкія основано выраженіе дробей въ одинаковыхъ доляхъ, иначе сказать приведеніе къ одному знаменателю. Это дѣйствіе не можетъ во всей своей полнотѣ принадлежать начальной школѣ. Для нея можно взять только тѣ случаи, когда одинъ знаменатель содержитъ въ себѣ остальныхъ. Даны, напр., дроби: $^3/_{50}$, $^4/_{25}$, $^1/_{10}$. Знаменатель 50 содержитъ въ себѣ 25 и 10. Такъ какъ въ 25-ой долѣ заключается 2 пятидесятыхъ, то 4 двадцатьпятыхъ равны 8 пятидесятымъ; точно такъ же десятая доля замѣняется 5 пятидесятыми, потому что изъ одной десятой выходитъ 5 пятидесятыхъ.

Что касается общаго случая приведенія дробей къ одному знаменателю, когда одинъ знаменатель не содержитъ въ себѣ другихъ, то это вычисленіе даетъ богатый матеріалъ для сметливости болѣе способныхъ учениковъ, обязательнымъ же считаться не можетъ. Чтобы смекнуть, что восьмушки и двѣнадцатыя доли могутъ быть выражены въ 24-ыхъ доляхъ, надо хорошо знать составъ чиселъ, твердо усвоить понятіе о дробяхъ и привыкнуть къ обращенію однѣхъ долей въ другія. Опредѣленныхъ правилъ для приведенія дробей къ одному знаменателю, въ особенности же точныхъ ариѳметическихъ правилъ, нач. школа дать не можетъ. Все дѣло возлагается на сообразительность учащихся.

40. Превращеніе мелкихъ долей въ крупныя доли и въ единицы. Чтобы производить превращеніе, надо знать отношеніе однѣхъ долей къ другимъ, подобно тому, какъ въ превращеніи мѣръ надо знать отношеніе мѣръ. Примѣръ: превратить 32 восьмушки ($^{32}/_8$) въ цѣлыя единицы; въ цѣлой единицѣ 8 восьмушекъ, а 32 восьмушки составляютъ столько единицъ, сколько разъ 8 содержится въ 32. Еще примѣръ: превратить 4 десятыхъ ($^4/_{10}$) въ пятыя доли; каждыя

2 десятыхъ составляютъ пятую долю, поэтому въ 4 десятыхъ столько пятыхъ, сколько разъ 2 содержится въ 4.

На превращенiи мелкихъ долей въ крупныя основано сокращенiе дробей. Сократить 4 шестыхъ ($^4/_6$), въ сущности, значитъ выразить шестыя доли въ болѣе крупныхъ третьихъ доляхъ. Такъ какъ каждыя 2 шестыхъ составляютъ треть, то въ 4 шестыхъ ($^4/_6$) столько третей, сколько разъ 2 содержится въ 4.

Сокращенiе менѣе употребительныхъ долей возможно для начальной школы только тогда, когда числитель содержится въ знаменателѣ цѣлое число разъ. Примѣръ: $^{15}/_{45}$. Эта дробь показываетъ, что 15, напр., копеекъ раздѣлены поровну между 45 мальчиками. „Какъ раздѣлить эти деньги?“ „Достанется ли каждому по цѣлой копейкѣ?“ „На сколькихъ человѣкъ придется копейка?“ „Если копейка приходится на троихъ, то какая часть копейки приходится на каждаго?“ „Такимъ образомъ, если 15 раздѣлить на 45, то на каждаго придется по $^1/_3$, или $^{15}/_{45} = {}^1/_3$“.

41. Сложенiе и вычитанiе дробей. Дроби съ одинаковыми знаменателями затрудненiй представить не могутъ. Если 1 карандашъ да 1 карандашъ составляютъ 2 карандаша, 1 фунтъ да еще 1 фунтъ — 2 фунта, то и 1 треть да 1 треть составляютъ 2 трети. Нелѣпые отвѣты, при которыхъ дѣти складываютъ числителя съ числителемъ, а знаменателя со знаменателемъ, появляются тогда, когда у нихъ нѣтъ правильнаго понятiя о дроби; его нѣтъ потому, что не дано имъ должнаго запаса наглядныхъ представленiй, изъ которыхъ понятiе могло бы образоваться; однимъ словомъ, ошибка произошла отъ недостатка наглядности. Такiя дѣти, лишенныя правильнаго понятiя о дроби, при видѣ обозначенiя $^3/_4$ мыслятъ о двухъ цѣлыхъ числахъ, 3 и 4, которыя находятся въ какой-то неясной для нихъ связи между собой. При видѣ формулы $^3/_4 + {}^3/_4$ дѣти рѣшаются сложить попарно тѣ представляющiяся имъ 4 цѣлыхъ числа, истинная связь между которыми приводитъ къ 2 дробнымъ количествамъ, или къ 2 именованнымъ числамъ: 3 четверти + 3 четверти.

Что касается дробей съ разными знаменателями, то ихъ сперва надо выразить въ одинаковыхъ доляхъ. Объ этомъ рѣчь была выше.

42. Умноженiе дроби на цѣлое. Задача: „Листъ бумаги стоитъ $^3/_4$ к. Ск. стоятъ 12 листовъ?“ Во всѣхъ случаяхъ, гдѣ умноженiе представляется затруднительнымъ, лучше всего замѣнять его сложенiемъ. Такъ и здѣсь. Одинъ листъ стоитъ 3 четверти, да другой 3 четверти, да 3-й, и т. д., всего 12 разъ по 3 четверти, получится

36 четвертей, или 9 коп. Еще задача: „Фунтъ чаю стоитъ $1^1/_2$ руб. Ск. надо заплатить за 5 фунтовъ чаю?“ Если считать по 1 руб., то получится 5 руб., да 5 разъ по половинѣ, будетъ 5 половинъ, или $2^1/_2$ руб.; всего $7^1/_2$ рублей.

43. Вычисленіе части цѣлаго. „Въ мѣрѣ 160 яблокъ. Сколько яблокъ въ $^3/_4$ мѣры?“ Это вопросъ на нахожденіе части. Чтобы опредѣлить $^3/_4$ числа 160, опредѣлимъ сперва $^1/_4$, она будетъ равна 40, а потомъ и 3 такихъ доли, онѣ составятъ 3 раза по 40, т.-е. 120. Другая задача: „Ск. верстъ я пройду въ $2^1/_4$ часа, если въ часъ буду проходить по 6 верстъ?“ Рѣшеніе: въ 2 часа я пройду $6 \times 2 = 12$ верстъ, да въ $^1/_4$ часа $1^1/_2$ версты, всего $13^1/_2$.

Опредѣленіе части числа называется въ учебникахъ ариѳметики умноженіемъ на дробь. Какъ въ умноженіи на цѣлое, такъ и въ умноженіи на дробь умножить значитъ взять, только въ первомъ случаѣ взять слагаемымъ само число, а во 2-мъ взять долю числа. Терминъ „умножить на дробь“, напр., „умножить на $^2/_5$“ для начальной школы преждевременевъ.

44. Содержаніе однѣхъ долей въ другихъ. Чтобы узнать, сколько разъ одна дробь содержится въ другой, выразимъ ихъ сперва въ одинаковыхъ доляхъ, а потомъ поступимъ такъ, какъ съ именованными числами. Примѣръ: „Сколько разъ содержатся 3 десятыхъ въ $1^1/_5$?“ Обращаемъ въ одинаковыя доли, получаемъ 3 десятыхъ и 12 десятыхъ. Но 3 доли содержатся въ 12 такихъ же доляхъ 4 раза, слѣд. отвѣтъ 4. Задача: „Въ кадку входитъ $2^1/_4$ п. масла. Ск. нужно кадокъ, чтобы помѣстить 18 пудовъ?“ Обращаемъ все въ четверти; сколько разъ 9 четвертей содержатся въ 72 четвертяхъ, столько и будетъ кадокъ.

Подобные вопросы требуютъ выраженія дробей въ одинаковыхъ доляхъ. Поэтому они доступны или въ случаѣ употребительныхъ, знакомыхъ дѣтямъ, долей, или въ случаѣ такихъ дробей, которыя легко выражаются въ одинаковыхъ доляхъ (см. § 39).

45. Вычисленіе цѣлаго по части. „За $^3/_8$ фунта рыбы заплачено 24 коп. Ск. стоитъ фунтъ?“ Выражаясь точнымъ ариѳметическимъ языкомъ, мы здѣсь дѣлимъ цѣлое число 24 на дробь $^3/_8$. Рѣшеніе такое: сперва узнаемъ, ск. стоитъ 1 восьмушка ф. рыбы; такъ какъ 3 восьмушки стоятъ 24 коп., то одна 8 коп.; но въ фунтѣ восьмушекъ бываетъ 8, поэтому фунтъ стоитъ $8 \times 8 = 64$ коп. Для дѣтей такого объясненія достаточно. Точный терминъ „раздѣлить на дробь“ пока лучше не сообщать.

Составныя именованныя числа.

46. Основанія выдѣленія сост. им. чиселъ въ особую ступень. Въ цѣлыхъ отвлеченныхъ числахъ (числа: пять, семь и т. д.), а также въ такъ наз. предметныхъ числахъ (т.-е. получившихся отъ счета опредѣленныхъ предметовъ: три стула, пять человѣкъ), мы пользуемся при счетѣ такими единицами, которыя уже выдѣлены, обособлены. Въ числахъ именованныхъ, т.-е. при измѣреніи величинъ, дѣло нѣсколько сложнѣе: единицы не выдѣлены, ихъ надо выбрать, намѣтить и тогда уже пересчитывать. Дана намъ, напр., какая-нибудь длина. Мы должны сперва выбрать единицу, хотя бы аршинъ, потомъ отложить эту единицу по длинѣ; тогда намѣтится тотъ рядъ единицъ, т.-е. отдѣльныхъ аршинъ, который предстоитъ намъ пересчитать. Вотъ этимъ и отличается простой счетъ отъ измѣренія: при счетѣ единицы даны и обособлены, при измѣреніи ихъ нужно выбрать и отмѣтить. Понятно теперь, что числа именованныя представляютъ собою въ этомъ отношеніи нѣкоторый шагъ впередъ, сравнительно съ числами отвлеченными и такъ наз. предметными. Еще большій шагъ по пути усложненія представляютъ составныя именов. числа. Это числа, выраженныя уже единицами нѣсколькихъ сортовъ, а не одного. Формула „2 п. 30 ф. 12 лот.“ является суммой трехъ чиселъ, изъ которыхъ каждое получилось отъ счета своихъ особыхъ единицъ. Изъ всего этого видно, что составныя именов. числа имѣютъ нѣкоторое право на выдѣленіе. Имъ можно предоставить особую ступень, подобно тому, какъ дѣйствія надъ отвлеченными числами имѣютъ свои ступени. Эта ступень составныхъ именов. чиселъ должна быть ближе къ концу начальнаго ариѳметическаго курса, въ виду той особой сложности, которой сопровождаются полученіе составн. именов. чиселъ и дѣйствія надъ ними. Сложность полученія чиселъ отзывается и на дѣйствіяхъ надъ ними.

Но, выдѣляя составныя именов. числа въ особую ступень, мы сдѣлаемъ большую ошибку, если пожелаемъ рѣзко отграничить эту ступень отъ дѣйствій надъ отвлеченными числами. Между отвлеченными и именов. числами громадное сходство въ дѣйствіяхъ. Раздробленіе и превращеніе —, въ сущности, обыкновенное умноженіе и дѣленіе. Раздроблять и превращать приходится и въ отвлеченныхъ числахъ, напр. при обращеніи сотенъ въ десятки или десятковъ въ сотни. Дѣйствія надъ сост. именов. числами подобны дѣйствіямъ

надъ отвлеченными: въ отвлеченныхъ числахъ разряды, а въ именованныхъ мѣры различныхъ наименованій. Изъ сказаннаго вытекаетъ: составныя имен. числа полезно выдѣлить въ особую ступень, но съ тѣмъ, чтобы не обособлять ихъ рѣзко отъ отвлеченныхъ чиселъ. Простѣйшіе вопросы, относящіеся къ сост. именов. числамъ, вполнѣ возможно проходить во всѣ 3 года, среди вопросовъ, которые касаются отвлеченныхъ чиселъ.

47. Характеръ этой ступени. На дѣйствія съ составн. именов. числами правильнѣе всего смотрѣть, какъ на рядъ задачъ, относящихся къ отвлеченнымъ числамъ и къ мѣрамъ. Такъ, всякое раздробленіе должно представляться задачей на умноженіе, дѣленіе сост. им. чиселъ — сложной задачей на дѣленіе и т. д.

Задачи могутъ рѣшаться нѣсколькими способами, такъ и дѣйствія надъ сост. им. числами могутъ производиться нѣсколькими путями. Тѣ пути, которые считаются общепринятыми и излагаются въ учебникахъ ариѳметики, — не единственные; они лишь самые удобные. Примѣръ: ученикъ говоритъ „100 фунтовъ“. Это не ошибка: вовсе не обязательно превращать мелкія мѣры въ крупныя, какъ только наберется нѣсколько крупныхъ мѣръ. Можетъ-быть, 2 п. 20 ф. яснѣе, чѣмъ 100 ф., но и послѣдняго выраженія отвергать нельзя. Еще примѣръ: раздробить 5 п. въ золотники. Нѣтъ непремѣнной необходимости 5 п. сперва обращать въ фунты. Можно узнать, сколько золотниковъ въ пудѣ (96 $\times$ 40), а потомъ полученное число 3 840 умножить на 5. Еще примѣръ: чтобы раздѣлить 15 п. 27 ф. на 7, ученикъ раздробляетъ все въ фунты и получаетъ въ отвѣтѣ 89 фунтовъ. Это, конечно, нерасчетливо и неэкономично, но ошибочнымъ назвать нельзя. Повторяемъ: дѣйствія надъ составными им. числами представляютъ рядъ задачъ, а не новыхъ теоретическихъ вопросовъ; правилами этихъ дѣйствій указываются такіе пути, которые желательны по своему удобству, но вовсе не обязательны.

Всякую новую задачу благоразумный учитель не объясняетъ впередъ, а заставляетъ сперва дѣтей испытать надъ ней свои силы. Такъ же и въ нашихъ примѣрахъ. Стоитъ на очереди, положимъ, умноженіе; дано 3 сут. 15 час. $\times$ 6. Пусть дѣти примутся за этотъ примѣръ и рѣшатъ его, какъ умѣютъ; разобравши ихъ способы и выдѣливши наиболѣе удобный, умѣстно обратить вниманіе и остальныхъ дѣтей на удобства этого способа. Но заботиться о точномъ однообразіи записей, дѣлать порядокъ записыванія и вычисленія обязательнымъ, въ особенности же разъяснять этотъ порядокъ за-

писыванія и вычисленія до рѣшенія примѣра — это значитъ главное смѣшивать со второстепеннымъ, а также лишать дѣтей той необходимой самостоятельности, какую имъ слѣдуетъ предоставить при рѣшеніи задачъ.

48. Со сколькими наименованіями слѣдуетъ брать составныя им. числа. Составныя им. числа, которыя содержатъ въ себѣ мѣры болѣе, чѣмъ 3 наименованій, имѣютъ очень мало примѣненія въ жизни. „12 п. 35 ф. 10 л. 2 зол. муки“ — подобное выраженіе не сообразно съ дѣйствительными житейскими отношеніями. Кто продаетъ муку пудами, тотъ не заботится ни о золотникахъ, ни о лотахъ; золотники и лоты въ такихъ случаяхъ отбрасываются. Точно такъ же и въ мѣрахъ длины: „разстояніе равно 5 верст. 125 саж. 1 арш. 10 вершк.“; при верстахъ даже смѣшно въ обыкновенныхъ случаяхъ простирать точность до вершковъ, ошибка въ вершкахъ могла имѣть мѣсто еще при измѣреніи верстъ, поэтому вершковый остатокъ лучше всего тоже отбросить.

При маломъ практическомъ значеніи, подобныя им. числа представляютъ также мало и теоретическаго интереса. Если ученикъ сознательно вычисляетъ при 3 наименованіяхъ, то онъ управится и съ 5: разница не въ степени пониманія, а только въ количествѣ вычисленій, притомъ довольно однообразныхъ и часто механическихъ.

Отсюда видно, что примѣры на составныя именов. числа должны ограничиваться, въ большинствѣ случаевъ, 3-мя и даже 2-мя наименованіями. Болѣе сложныя формулы, въ родѣ „365 сут. 5 час. 48 мин. 48 сек.“, слѣдуетъ давать лишь изрѣдка, только для провѣрки того, сумѣютъ ли дѣти справиться со сложнымъ вычисленіемъ.

49. Повтореніе мѣръ. При образованіи предметныхъ чиселъ, мы пользуемся естественными единицами, при числахъ же именованныхъ условно избранными, т.-е. мѣрами. Желательно, чтобы эти единицы представлялись дѣтямъ такъ же ясно, какъ и естественныя. Отсюда вытекаетъ необходимость самой полной наглядности при изученіи мѣръ. Единицы избранныя, т -е. мѣры, могутъ быть гораздо болѣе похожими другъ на друга, чѣмъ единицы естественныя, такъ какъ онѣ различаются только величиной: это еще лишній доводъ въ пользу наглядности.

Мѣры сообщаются дѣтямъ постепенно во всѣ 3 года. Теперь время ихъ объединить, привести въ систему и расположить по отдѣламъ

тѣхъ величинъ, которыя ими измѣряются. Наглядное представленіе мѣръ возобновляется еще разъ. Мѣры длины, вѣса и вмѣстимости пріурочиваются къ какимъ-нибудь знакомымъ размѣрамъ: росту человѣка, его вѣсу, а также размѣру, вѣсу и вмѣстимости какихъ-нибудь употребительныхъ вещей. Нѣсколько труднѣе познакомить дѣтей съ мѣрами времени; можно такъ: секунда — время размаха длиннаго маятника часовъ, минута — время, въ которое можно сдѣлать около 50 шаговъ.

50. Раздробленіе. Требуется раздробить 2 п. 32 ф. 1 л. въ золотники. Дѣйствіе располагается такъ:

$$40 \times 2 = 80 \text{ ф.},\ 80 + 32 = 112 \text{ ф.}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 112 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 32 \\ \hline 3\,584 \end{array} \text{ лота} + 1 = 3\,585 \text{ л.}$$

$$3 \times 3\,585 = 10\,755 \text{ золотн.}$$

Въ этомъ расположеніи легкія дѣйствія записаны строкой, а трудныя столбцомъ. Множимое съ множителемъ не переставлены. Наименованія приписаны только къ отвѣтамъ; у данныхъ чиселъ ихъ нѣтъ. Это, конечно, не совсѣмъ точно. Но эта неточность простительна: всякій ученикъ начальной школы понимаетъ, что запись „80 + 32 = 112 ф." вовсе не обозначаетъ того, что изъ отвлеченныхъ единицъ получаются фунты; этой записью отмѣчается только то, что полученное въ отвѣтѣ число 112 обозначаетъ фунты, а не что-нибудь другое.

51. Превращеніе. Превратить 23 786 футовъ въ версты. Ходъ вычисленія особыхъ затрудненій не представляетъ. Легкія дѣленія записываются строкой, а трудныя столбцомъ. У отвѣтовъ подписывается наименованіе, чтобы дѣти не сбивались.

52. Сложеніе, вычитаніе и умноженіе. На легкихъ примѣрахъ съ 2 наименованіями, которые могутъ быть продѣланы учениками самостоятельно, выясняется связь между дѣйствіями надъ отвлеченными и надъ составными именованными числами. Для удобства, первыя три дѣйствія, сложеніе, вычитаніе и умноженіе, начинаются съ низшихъ разрядовъ. Когда въ сложеніи и умноженіи набирается низшихъ единицъ достаточное количество, онѣ превра-

щаются въ высшія единицы и присоединяются къ соотвѣтствующимъ высшимъ единицамъ.

Расположеніе вычисленія можетъ быть взято такое. Сперва отвѣтъ вычисляется, такъ сказать, начерно, т.-е. безъ превращеній. Потомъ производятся необходимыя превращенія отдѣльно, столбцомъ или строкой. Наконецъ, подписывается отвѣтъ въ окончательной формѣ.

53. Дѣленіе. Дѣленіе составныхъ именованныхъ чиселъ на части вполнѣ напоминаетъ дѣленіе отвлеченныхъ чиселъ. Это сходство обоихъ процессовъ надо выдвинуть и указать дѣтямъ. Начинается дѣленіе съ высшихъ разрядовъ или высшихъ мѣръ. Причина одинаковая въ обоихъ случаяхъ, т.-е. при отвлеченныхъ числахъ и при составныхъ именованныхъ: при такомъ порядкѣ дается возможность получившіеся въ остаткахъ разряды или мѣры обращать въ слѣдующіе низшіе.

Дѣленіе по содержанію требуетъ того, чтобы дѣлимое и дѣлитель были обращены предварительно въ одинаковыя мѣры. Необходимость такого обращенія не ясна для дѣтей, и на нее надо навести при помощи подходящихъ примѣровъ. Первый примѣръ беремъ такой: „сколько тетрадей, по 2 листа каждая, можно сшить изъ 4 дестей бумаги?“ Дѣти, пользуясь наглядностью, не дадутъ нелѣпаго отвѣта: „2 тетради“, т.-е. не раздѣлятъ прямо 4 на 2. Если бы нелѣпый отвѣтъ получился, то его сейчасъ же можно бы опровергнуть наглядно: выйдетъ 2 тетради не по два листа, а по двѣ дести. Дѣти могутъ предложить такой способъ: изъ дести выходитъ 12 тетрадей (24 : 2 = 12), а изъ 4 дестей 4 раза по 12, т.-е. 48 тетрадей. Принявъ такой способъ, слѣдуетъ сказать, что вмѣсто отдѣльнаго дѣленія дестей по 2 листа, можно сразу раздѣлить 4 дести, раздробивши ихъ, какъ и одну десть, въ листы. Затѣмъ продѣлывается еще нѣсколько подобныхъ примѣровъ: „6 д. : 2 л.“, „2 п. : 2 ф.“ Ученики предлагаютъ свои примѣры. Приходятъ къ выводу: „если дѣлимое и дѣлитель выражены въ разныхъ мѣрахъ, то ихъ надо обратить въ одинаковыя мѣры“. Этотъ выводъ прилагается и къ болѣе труднымъ случаямъ: a) когда дѣлитель составное именованное число — „6 д. : 1 д. 12 л.“, b) когда дѣлимое и дѣлитель оба представляютъ составныя именов. числа: „4 дюж. 6 перьевъ: 1 дюж. 6 перьевъ“. Знакъ дѣленія читается во всѣхъ подобныхъ примѣрахъ такъ: или „содержится“, или „раздѣлить по“.

54. Повтореніе дѣйствій надъ дробями. Дѣйствія надъ составными именованными числами, а также относящіяся къ нимъ

задачи даютъ много матеріала для повторенія дѣйствій надъ дробями. Одинъ и тотъ же вопросъ можетъ во многихъ случаяхъ рѣшаться и при помощи цѣлыхъ именованныхъ чиселъ и при помощи дробныхъ. Такъ, задача „ск. топоровъ, вѣсомъ по 4 ф. 16 л. каждый, получится изъ 9 пудовъ желѣза?" можетъ быть рѣшена, во-первыхъ, раздробленіемъ дѣлимаго и дѣлителя въ лоты. Но такъ дѣлать долго; гораздо легче выразить дѣлимое и дѣлителя въ фунтахъ или полуфунтахъ. Тогда получимъ 360 ф. и $4^1/_2$ ф., или 720 полуфунтовъ и 9 полуфунтовъ. Отвѣтъ опредѣлится дѣленіемъ 720 на 9.

Такъ и вездѣ, гдѣ только возможно, полезно задачу, продѣланную при помощи составн. имен. чиселъ, продѣлать еще разъ при помощи дробей. Придумываніемъ различныхъ способовъ изощряется сообразительность дѣтей. Дроби приводятся въ связь съ имен. числами, а отъ этого пониманіе тѣхъ и другихъ становится значительно глубже.

Квадратныя мѣры.

55. Необходимыя геометрическія понятія. Глава о квадратныхъ измѣреніяхъ представляетъ отрывокъ изъ геометріи, присоединенный къ начальной ариѳметикѣ. Безъ необходимыхъ геометрическихъ свѣдѣній, эта глава обращается въ простое заучиваніе правила, въ родѣ „длину помножить на ширину". Въ такомъ случаѣ теряется образовательный элементъ этого отдѣла.

Начинаемъ бесѣду съ бумажнаго треугольника. „Ск. угловъ у этого куска?"—„Три".—„Какъ его за это можно назвать?—„Треугольникомъ". Показываемъ далѣе какой-нибудь четыреугольникъ и даемъ названіе ему; затѣмъ беремъ четыреугольникъ съ прямыми углами, т.-е. прямоугольникъ. Объясняемъ, что прямой уголъ отличается отъ другихъ угловъ тѣмъ, что у него стороны идутъ не наискось одна къ другой, а прямо, т.-е. отвѣсно. Продолжаемъ ознакомленіе: у прямоугольника стороны попарно равны: верхняя равна нижней, а правая лѣвой. Прямоугольникъ, у котораго всѣ стороны равныя, наз. квадратомъ. Если у квадрата каждая сторона равна вершку, то онъ называется квадратнымъ вершкомъ.

Всѣ эти куски, или фигуры, должны быть показаны, напр. въ видѣ бумажныхъ вырѣзокъ. Чертить фигуры на классной доскѣ не такъ удобно: тогда ихъ надо затушевывать, иначе у дѣтей можетъ получиться ложное представленіе: вмѣсто куска, т.-е. вмѣсто

площади, они будутъ представлять себѣ обводъ этой площади, периметръ. Квадратные вершки полезно раздать ученикамъ на руки, такъ чтобы каждый изъ нихъ имѣлъ по квадратному вершку. Различіе между простымъ вершкомъ и квадратнымъ вершкомъ должно быть проводимо во всей строгости, и на словахъ, и на дѣлѣ; кв. вершокъ представляетъ изъ себя опредѣленный кусокъ, тогда какъ въ простомъ вершкѣ важна только его длина.

56. Измѣреніе площади полосы. Подъ полосой мы разумѣемъ такой прямоугольникъ, у котораго одна сторона вершокъ, а другая нѣсколько вершковъ. Спрашивается: сколько квадратиковъ, то-есть кв. вершковъ, умѣстится въ подобной полосѣ? Узнать это можно прямымъ наложеніемъ; получится, напр., такой отвѣтъ: въ полосѣ 6 квадратиковъ. „Нельзя ли было этотъ же отвѣтъ найти при помощи простого аршина?“ Дѣти догадываются, что можно: стоитъ только измѣрить длину полосы. Изъ нѣсколькихъ примѣровъ слѣдуетъ выводъ: сколько въ длинѣ полосы содержится вершковъ, столько въ полосѣ содержится квадратиковъ. Этотъ выводъ очень важенъ. Его дѣти повторяютъ еще на нѣсколькихъ полосахъ, которыя можно раздать имъ на руки. Полезно выдать каждому ученику по аршину, чтобы побольше было упражненій въ непосредственномъ измѣреніи.

57. Измѣреніе площади прямоугольника. Полоса представляла собой простѣйшій видъ прямоугольника, когда ширина равна единицѣ, въ нашемъ случаѣ вершку. Переходимъ теперь къ общему виду прямоугольника, когда и длина и ширина содержитъ нѣсколько вершковъ. Для этого беремъ нѣсколько полосъ, одинаковой длины, шириною каждая въ вершокъ. Если эти полосы вырѣзаны изъ цвѣтной бумаги, то ихъ можно привѣсить къ классной доскѣ. Получится цвѣтной прямоугольникъ. Пусть полосъ въ немъ 5, а длина каждой = 6 вершкамъ. „Сколько квадратиковъ въ этомъ прямоугольникѣ?“ — „30“. — „Запишите дѣйствіе, которымъ вы нашли отвѣтъ!“ — „6 × 5 = 30 кв. вершк.“ — „Что обозначаетъ число 6?“ — „Столько квадратиковъ въ каждой полосѣ, столько вершковъ въ длинѣ прямоуг.“ — „Что обозначаетъ число 5?“ — „Столько полосъ въ прямоугольникѣ, столько вершковъ въ его ширинѣ“. Изъ нѣсколькихъ подобныхъ примѣровъ получается обобщеніе: „надо число, показывающее длину, помножить на число, показывающее ширину, тогда и получится площадь прямоугольника“. Это правило не слѣдуетъ сокращать въ такую ошибочную

форму: „надо длину помножить на ширину“. Дѣйствительно, не длина множится на ширину, т.-е. не 6 вершковъ на 4 вершка: на 4 вершка и множить нельзя, такъ какъ множитель долженъ быть числомъ отвлеченнымъ. Перемножаются отвлеченныя числа, и отвѣтъ получается отвлеченный, а ужъ потомъ приписывается этому отвѣту наименованіе, которое опредѣляется смысломъ задачи, именно наименованіе кв. вершковъ. Если ужъ придавать производителямъ наименованія, т.-е. въ предыдущей строкѣ $6 \times 5 = 30$ приписывать наименованіе и къ даннымъ числамъ, то правильная запись будетъ такая: 6 кв. вершк. $\times 5 = 30$ кв. вершк. Здѣсь 6 квадратныхъ вершк. обозначаютъ площадь полосы, 5 — число полосъ, а 30 кв. вершк. площадь всѣхъ 5 полосъ, т.-е. всего прямоугольника.

58. Таблица квадратныхъ мѣръ. Когда дѣти освоятся съ кв. вершкомъ и на рядѣ непосредственныхъ измѣреній привыкнутъ пользоваться этой мѣрой, можно познакомить ихъ постепенно съ кв. аршиномъ, кв. футомъ и кв. дюймомъ, а также съ кв. саженью, кв. верстой и десятиной. Первыя 3 мѣры можно приготовить изъ бумаги, а также разлиневать: кв. арш. на кв. вершки, кв. футъ на кв. дюймы. Кв. сажень можно обчертить на полу или на дворѣ, десятину и кв. версту показать приблизительно на окружающей школу мѣстности. Лишь получивши твердое наглядное представленіе о кв. мѣрахъ, дѣти не будутъ смѣшивать ихъ съ линейными.

Сколько въ кв. аршинѣ кв. вершковъ, въ кв. футѣ кв. дюймовъ, вообще единичныя отношенія квадр. мѣръ — заучивать дѣтямъ не къ чему. Числа все трудныя и не особенно употребительныя. Но умѣть находить эти числа — обязательно. Находятся же они по тому самому правилу, по какому опредѣляется площадь прямоугольника. Напр., сколько въ кв. футѣ кв. дюймовъ? Вычисляемъ такъ: въ кв. футѣ 12 полосъ, каждая полоса содержитъ 12 кв. дюймовъ, слѣд. всего квадратиковъ получается $12 \times 12 = 144$.

59. Задачи на квадратныя мѣры. Едва ли какая-нибудь другая глава начальной ариѳметики настолько нуждается въ наглядности, какъ эта глава о квадратныхъ измѣреніяхъ и слѣдующая — о кубическихъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, нѣтъ отдѣловъ, которые допускали бы столько прикладныхъ работъ, какъ эти два. Сборникъ задачъ для кв. и куб. измѣреній почти не нуженъ, развѣ только для самост. работъ. Масса пригодныхъ задачъ — въ школѣ и кру-

гомъ школы. Площадь пола, стола, оконъ, дверей, печки и т. п. — богатый матеріалъ для измѣренія. Если дать ученикамъ по аршину или по футу, то закипитъ оживленная, разумная и высоко-полезная работа.

Къ болѣе труднымъ задачамъ принадлежатъ тѣ, въ которыхъ размѣры прямоугольника выражены сост. именов. числами, напр. длина равна 1 арш. 5 вершк., ширина 1 арш. 3 вершк. „Можно ли измѣрить эту площадь кв. аршиномъ?“ — „Нѣтъ, получится остатокъ“. Поэтому пользуются кв. вершками. Для большей ясности, дѣлятъ площадь на полосы, шириною каждая 1 верш. Число квадратиковъ въ полосѣ — 21, число полосъ — 19. По общему правилу, множатъ 21 на 19.

Если дается площадь прямоугольника и длина его, а требуется вычислить ширину, то подобный вопросъ разъясняется сперва на легкихъ числахъ. Примѣръ: площадь содержитъ 20 кв. в., длина 5 в., найти ширину. Отвѣтъ 4 дѣти найдутъ умноженіемъ; они будутъ помножать 5 на различныя числа до тѣхъ поръ, пока не получатъ 20. Отъ умноженія легко перейти и къ дѣленію. Для этого надо поставить вопросъ: „Какія числа даны?“ „Какое число получилось въ отвѣтѣ?“ „Какъ изъ чиселъ 20 и 5 получить число 4?“ — „20 : 5 = 4“.

60. Площадь треугольника. Площади другихъ фигуръ, сверхъ прямоугольника, можно изучить въ нач. школѣ только при благопріятныхъ условіяхъ. Изъ такихъ дополнительныхъ площадей самая важная — площадь треугольника. Всякій многоугольникъ можно раздѣлить линіями, идущими изъ одной вершины въ другую, на треугольники, или, какъ говорятъ крестьяне, на клинья. Площадь треугольника равна длинѣ нижней стороны (такъ наз. основанія), помноженной на высоту треуг., т.-е. на разстояніе отъ вершины до основанія. Правило это можно выяснить дѣтямъ наглядно. Беремъ бумажный треугольникъ (остроугольный). Дѣлимъ боковыя его стороны пополамъ. Изъ срединъ этихъ боковыхъ сторонъ проводимъ отвѣсныя (перпендикулярныя) линіи къ основанію треугольника. Тогда по краямъ большого треугольника получится справа и слѣва по маленькому треугольнику. Ихъ можно отрѣзать и приставить къ вершинѣ большого треугольника, съ каждой стороны по одному, прямымъ угломъ вверхъ. Тогда большой треугольникъ обратится въ прямоугольникъ. Высота у него будетъ та же, что у треугольника, а основаніе вдвое меньше основанія

треугольника. Такимъ путемъ можно выяснить то правило, по которому измѣряется площадь треугольника.

Кубическія мѣры.

61. Понятіе объ объемѣ. Понятіе объ объемѣ, или вмѣстимости, менѣе доступно дѣтямъ, чѣмъ понятіе о площади, а поэтому оно требуетъ большаго уясненія. Берется для сравненія кружка, ведро и бочка. „Въ чемъ воды помѣщается больше?“ „Слѣд. вмѣстимость чего больше?“ „Вмѣстимость иначе мы будемъ называть объемомъ“. Затѣмъ идетъ приблизительное, на глазъ, сравненіе вмѣстимостей какихъ-нибудь извѣстныхъ предметовъ.

Для предметовъ съ толстыми стѣнками объемъ не совпадаетъ съ вмѣстимостью, такъ какъ онъ включаетъ въ себѣ, кромѣ вмѣстимости, еще объемъ стѣнокъ. Но для нашей цѣли этой точностью можно пожертвовать, тѣмъ болѣе, что въ чисто геометрическихъ тѣлахъ объемъ равенъ вмѣстимости.

62. Измѣреніе объема ящика. Чтобы измѣрить площадь, надо сравнить ее съ опредѣленной площадью, напр. съ кв. вершкомъ. Подобно этому, чтобы измѣрить объемъ, надо сравнить его съ опредѣленнымъ объемомъ. За такіе опредѣленные объемы принимаются объемы нѣкоторыхъ кубиковъ или кубовъ. Кубъ — это прямоугольный брусъ, у котораго длина, ширина и высота одинаковы. Если всѣ размѣры куба будутъ равны вершку, то это будетъ куб. вершокъ, если дюйму, то куб. дюймъ, и т. д.

Измѣреніе объема начинается съ простѣйшаго случая. Берется брусокъ, шириною въ дюймъ, высотою тоже дюймъ, а длиною нѣсколько дюймовъ. Этотъ брусокъ можетъ быть или цѣльнымъ, или составленнымъ изъ куб. дюймовъ. Въ немъ столько куб. дюйм., сколько простыхъ дюймовъ заключается въ длинѣ. Этотъ выводъ прилагается къ ряду другихъ брусковъ, у которыхъ опять-таки ширина и высота равны дюйму, а длина — нѣсколькимъ дюймамъ.

За брускомъ идетъ доска. У ней высота равна дюйму, а ширина и длина нѣсколькимъ дюймамъ. Хорошо, если эта доска разлагается на бруски, такіе, какъ описано выше. Объемъ доски вычисляется такъ. Положимъ, длина равна 10 дюйм., а ширина 8-ми. Слѣд., ее можно, на дѣлѣ или мысленно, разложить на 8 брусковъ, изъ которыхъ каждый будетъ имѣть въ длину 10 дюйм., а въ ширину и высоту 1 дюймъ. Тогда 8 брусковъ дадутъ каждый по 10

куб. дюймовъ, а всѣ вмѣстѣ 80 куб. дюйм., такъ какъ $10 \times 8 = 80$. Отсюда выходитъ, что объемъ доски, высота которой равна дюйму, вычисляется такъ: надо число, выражающее длину, помножить на число, выражающее ширину, тогда и получимъ объемъ доски.

Отъ доски переходимъ, наконецъ, къ нѣсколькимъ подобнымъ доскамъ одинаковой длины и ширины, толщиной же каждая въ 1 д. Накладываясь одна на другую, онѣ дадутъ прямоугольный параллелепипедъ, котораго длина, положимъ, 10 дюйм., ширина 8 дюйм., а высота 6 дюйм., слѣд. досокъ, толщиною въ 1 дюймъ, взято 6. Объемъ одной доски равенъ $10 \times 8 = 80$ куб. дюйм., а объемъ 6-ти такихъ досокъ равенъ $80 \times 6 = 480$ куб. дюйм. Это число 480 мы получили перемноженіемъ чиселъ, выражающихъ размѣры тѣла. Беремъ еще нѣсколько примѣровъ и изъ нихъ выводимъ общее правило. Такъ какъ терминъ „прямоуг. параллелепипедъ“ для дѣтей труденъ, то его можно замѣнить терминомъ „прямоугольный брусъ“ или просто „прямоугольный предметъ“. Тогда получится правило: „надо числа, показывающія длину, ширину и высоту, перемножить, тогда и получимъ объемъ прямоугольнаго предмета“.

Наглядныя пособія, которыя упоминаются выше, т.-е. кубики, бруски и доски, можно взять изъ кубическаго ящика, если онъ есть въ школѣ. Если же его нѣтъ, то придется сдѣлать какъ-нибудь домашними средствами, что не особенно трудно. Для работъ съ кубическими измѣреніями самый удобный изъ прямоугольныхъ предметовъ — ящикъ. На измѣреніи объемовъ ящиковъ и слѣдуетъ упражнять дѣтей. При этомъ слѣдуетъ возможно чаще производить повѣрку измѣренія, т.-е. сперва измѣрить и вычислить объемъ, пользуясь обыкновенными дюймами, а потомъ то же самое продѣлать, пользуясь куб. дюймами и производя непосредственное наложеніе.

63. Таблица кубическихъ мѣръ. Кромѣ куб. дюйма слѣдуетъ еще показать куб. футъ, куб. вершокъ и, если можно, куб. аршинъ и куб. сажень. Наглядное знакомство съ этими мѣрами очень важно, такъ какъ только при условіи наглядности, дѣти получаютъ правильное и ясное представленіе о куб. мѣрахъ и куб. измѣреніяхъ и отличаютъ куб. мѣры отъ квадратныхъ и линейныхъ.

Сколько разъ низшая куб. мѣра содержится въ слѣдующей высшей, — это заучивать дѣтямъ не къ чему. Но они сознательно должны усвоить способъ, какимъ вычисляется, напр., что въ куб-

футѣ содержится 1 728 куб. дюймовъ. Именно, куб. футъ разлагается на 12 досокъ, толщиною каждая въ 1 дюймъ, а шириною и длиною по 12 дюйм. Доска разлагается на 12 брусковъ, шириною и толщиною въ 1 дюймъ, а длиною въ 12 дюйм., доска $= 12 \times 12 = 144$ куб. дюйм., а весь куб. футъ $= 144 \times 12 = 1728$ куб. дюйм.

64. Задачи на кубическія мѣры. Темы для задачъ на кубическія мѣры можно въ обиліи брать изъ окружающей обстановки: напр. вычислять объемъ шкапа, комнаты, печки и т. п.

Кубическія измѣренія полезно сравнивать съ квадратными. Ходъ тѣхъ и другихъ во многомъ одинаковъ. Поэтому, при куб. измѣреніяхъ часто можно наводить тѣмъ, что ссылаться на кв. измѣренія. Напр., если размѣры прямоугольника выражены въ разныхъ мѣрахъ, то для опредѣленія площади, ихъ надо обратить въ одинаковыя мѣры. Подобно этому, если размѣры прямоуг. предмета выражены въ разныхъ мѣрахъ, то ихъ тоже надо выразить въ одинаковыхъ мѣрахъ, чтобы опредѣлить объемъ.

Мѣры времени.

65. Необходимость задачъ на вычисленіе времени и способъ ихъ рѣшенія. Умѣнье точно и скоро высчитывать время имѣетъ большую практическую цѣнность. „Время“ — говорятъ — „деньги“, но время никогда не будетъ для насъ деньгами, если мы не будемъ умѣть считать его такъ же легко и хорошо, какъ считаемъ деньги. Въ учебникахъ ариѳметики дается такъ наз. ариѳметическій способъ рѣшенія задачъ на время. Это способъ сложный, относящій всѣ событія къ началу христіанской эры, къ Рождеству Христову.

Для начальной школы надо воспользоваться болѣе легкимъ способомъ, который допускалъ бы, главнымъ образомъ, устное вычисленіе и болѣе приближался бы къ тѣмъ пріемамъ, которыми пользуются дѣловые люди при своихъ расчетахъ. Основаніе этого болѣе легкаго способа состоитъ въ слѣдующемъ: за начальный моментъ при вычисленіи принимается не начало эры, а одно изъ тѣхъ событій, которыя даны въ задачѣ, притомъ болѣе раннее. Подробности этого способа мы выяснимъ по отдѣламъ, сперва примѣнительно къ низшимъ мѣрамъ времени, а потомъ — къ высшимъ.

66. Вычисленіе минутъ и часовъ. Вопросы, касающіеся минутъ и часовъ, предполагаютъ, что дѣти предварительно ознакомились

со стѣнными или карманными часами и умѣютъ ими пользоваться. Рѣшимъ, для примѣра, нѣсколько задачъ. „Сколько времени прошло съ 3 часовъ утра до 7 часовъ вечера того же дня?“ Объясненіе: съ 3 часовъ утра до 3 часовъ пополудни прошло 12 часовъ, съ 3 часовъ пополудни до 7 часовъ вечера — 4 часа, всего 16 часовъ. Другая задача: „Занятія начались въ 7 час. 45 мин. утра, окончились въ 2 ч. 30 м. пополудни. Сколько времени они продолжались?“ Объясненіе: съ 7 час. 45 мин. до 1 час. 45 мин. прошло 6 часовъ ($12+1=13$, $13-7=6$); съ 1 час. 45 мин. до 2 ч. 30 м. — 45 мин., всего 6 ч. 45 м. Во всѣхъ подобныхъ задачахъ за начало счета лучше всего принимать не начало сутокъ, т.-е. полночь, а время перваго, ранняго, событія.

67. Вычисленія въ пред. мѣсяца. Вычисленія времени отличаются значительной неопредѣленностью по двумъ причинамъ. Во-первыхъ, когда мы говоримъ „съ такого-то числа до такого-то“ напр. „съ 15-го до 20-го“, то неизвѣстно, принимать ли въ счетъ и крайнія числа, и если принимать, то оба или одно. Обыкновенно принимаютъ въ расчетъ которое-нибудь одно изъ крайнихъ чиселъ, чаще первое. Но для учениковъ нач. школы необходимо дать болѣе опредѣленное условіе, особенно на первое время, когда они только еще знакомятся съ подобными задачами. Необходимо указывать точнѣе, съ какого именно времени дня считать до какого; напр. полезно бы выражаться такъ: „съ полудня 15-го числа до полудня 20-го“ или „съ вечера 15-го до вечера 20-го“. Тогда изъ 15-го числа надо будетъ счесть вечеръ до полуночи, а изъ 20-го — начало сутокъ до вечера; эти два куска и дадутъ полныя сутки, такъ что два крайнихъ числа, т.-е. 15-е и 20-е, сократятся въ 1 сутки.

Во-вторыхъ, вопросъ „сколько дней прошло съ 15-го числа до 20-го“ неопредѣленъ благодаря выраженію „дней“. Подразумѣвать ли подъ этимъ сутки, или только дни, т.-е. время съ 6 часовъ утра до 6 час. вечера? Если только дни, то непремѣнно полные, или же принимать въ счетъ и части дня? Полныхъ дней съ 15-го числа до 20-го 4: 16-е число, 17-е, 18-е, 19-е. Но, очевидно, нашъ вопросъ предполагаетъ не одни полные дни, онъ подразумѣваетъ сутки. Поэтому будемъ говорить опредѣленнѣе „сколько сутокъ“.

Итакъ, вопросы, касающіеся вычисленія времени, надо ставить въ нач. школѣ опредѣленнѣе, чтобы не сбивать ими дѣтей. Надо указывать, съ какого времени дня считать до какого, и вмѣсто термина „день“ употреблять „сутки“.

Разберемъ теперь 3 вида задачъ, одинъ на сложеніе и два на вычитаніе. Сложеніе. „Сейчасъ полдень 4 іюля. Какое число будетъ черезъ 5 сутокъ?“ Чтобы вывести правило рѣшенія, разберемъ вопросъ для небольшого промежутка времени, для 1—2 сутокъ. Именно, черезъ сутки будетъ полдень 5-го іюля, черезъ 2 сутокъ полдень 6-го іюля. Какъ мы получили эти отвѣты: 5-е, 6-е? Къ четыремъ прибавили единицу, получили 5, слѣд. отвѣтъ — пятое; къ четыремъ прибавили 2, получили 6, слѣд. отвѣтъ 6-е. Поэтому черезъ 5 сутокъ, считая съ полудня 4-го іюля, будетъ полдень 9-го іюля, такъ какъ $4 + 5 = 9$. Вообще, во всѣхъ подобныхъ задачахъ къ числу, выражающему первый моментъ (у насъ число 4, первый моментъ — 4-е іюля), надо прибавить число промежуточныхъ сутокъ (у насъ 5: черезъ 5 сутокъ) и тогда получимъ число, выражающее второй моментъ (число 9, слѣд. 9-е іюля). Уяснивши себѣ этотъ порядокъ на малыхъ числахъ, дѣти воспользуются имъ и при большихъ числахъ. Если сегодня 4-е іюля, сейчасъ полдень, то черезъ 20 сутокъ будетъ полдень 24 іюля, черезъ 25 — полдень 29 іюля и т. д. Если сложеніе усвоено, то вопросы на вычитаніе рѣшаются легко, такъ какъ правило ихъ рѣшенія такое же. Если сейчасъ утро 4-го іюля, то сутки тому назадъ было утро 3-го іюля, а двое сутокъ тому назадъ было утро 2-го іюля. Эти отвѣты, 3-е и 2-е, получились, очевидно, вычитаніемъ: $4 - 1 = 3$, слѣд. 3-е число; $4 - 2 = 2$, слѣд. 2-е число. Приходимъ къ общему выводу: надо изъ числа, обозначающаго день мѣсяца, вычесть число промежуточныхъ сутокъ, тогда и получимъ то число мѣсяца, которое требуется найти. Это правило прилагается и къ большимъ числамъ. Напр., если сейчасъ вечеръ 29-го іюля, то 20 сутокъ тому назадъ былъ вечеръ 9-го іюля, такъ какъ $29 - 20 = 9$.

На основаніи сложенія рѣшается второй вопросъ вычитанія, именно, когда требуется найти, чему равенъ промежутокъ времени между 2 числами мѣсяца. Задача: „Сколько сутокъ заключается въ промежуткѣ времени, считая съ полудня 4-го іюля до полудня 7-го?“ Отвѣчаемъ: 3 сутокъ. Что это такъ, доказываемъ повѣркой: $4 + 3 = 7$. Сметливыя дѣти, навѣрно, изложатъ и другой выводъ этого же правила, такой: „съ полудня 4-го іюля до полудня 5-го — сутки, до полудня 6-го — двое; эти отвѣты находимъ вычитаніемъ: $5 - 4 = 1$, $6 - 4 = 2$, слѣд. и въ нашемъ примѣрѣ надо вычесть 4 изъ 7, получится 3“. Общее правило: чтобы высчитать, сколько сутокъ въ промежуткѣ, надо изъ одного числа, выражающаго день мѣсяца, вычесть другое.

68. **Переходъ изъ одного мѣсяца въ другой.** Всѣ предыдущія вычисленія производятся легко, когда они заключаются въ предѣлѣ одного и того же мѣсяца. Но къ нимъ можно привести и тотъ случай, когда числа принадлежатъ разнымъ мѣсяцамъ. Пояснимъ на примѣрѣ. За 30-мъ апрѣля слѣдуетъ не 31-е апрѣля, а 1 мая; мы же условимся счетъ продолжать, т.-е. 1 мая будемъ считать за 31-е апрѣля, 2-е мая за 32-е апрѣля и т. д., 10-е мая за 40-е апрѣля. При такомъ распространеніи счета, разные мѣсяцы будутъ приводиться къ одному. Разберемъ задачи.

I. „Событіе случилось въ полдень 15-го апрѣля. Когда исполнится 40 сутокъ съ момента этого событія?“ Первоначальный отвѣтъ—55-го апрѣля, такъ какъ $40 + 15 = 55$. Но въ апрѣлѣ только 30 дней, остальные дни принадлежатъ маю; $55 - 30 = 25$, слѣд. 25-го мая.

II. „Событіе случилось въ полдень 15-го апрѣля. Другое событіе было на 40 сутокъ ранѣе. Когда оно произошло?“ Надо бы изъ 15 вычесть 40, согласно правилу. Но такъ какъ 15 менѣе 40, то преобразовываемъ число, припадлежащее апрѣлю, въ соотвѣтствующее число марта, будетъ 46-е марта ($31 + 15 = 46$). Изъ 46 вычитаемъ 40 и получаемъ въ отвѣтѣ 6-е марта.

III. „Жилецъ переѣхалъ на квартиру 23-го апрѣля утромъ, а съѣхалъ съ нея утромъ 21-го мая. Сколько сутокъ онъ прожилъ на квартирѣ?“ Чтобы вычитаніе сдѣлалось возможнымъ, надо числа разныхъ мѣсяцевъ привести къ числамъ одного мѣсяца. Приводимъ къ апрѣлю, такъ какъ наоборотъ, очевидно, сдѣлать нельзя, т.-е. нельзя числа апрѣля выразить въ числахъ мая. Получаемъ такую задачу: найти промежутокъ времени между 51-мъ апрѣля и 23-мъ. Вычитаемъ 23 изъ 51 и получаемъ 28.

69. **Вычисленіе 9-го, 20-го, 40-го и т. п. дня.** Эти вычисленія могутъ имѣть большое практическое примѣненіе. Прежде всего установимъ смыслъ выраженія „9-й день“. Девятый день, т.-е. девятыя сутки, начинается тогда, когда исполнится 8 сутокъ: какъ только 8 сутокъ прошло, такъ и начинаются девятыя. Поэтому вопросъ: „какого числа будетъ 9-й день?“ — совершенно равенъ вопросу: „какого числа исполнится 8 сутокъ?“, отвѣты на оба вопроса одинаковы.

Руководствуясь этимъ, рѣшимъ задачу: „Пасха 9-го апрѣля. Когда Троицынъ день?“ Троицынъ день бываетъ въ 50-й день послѣ Пасхи, т.-е. черезъ 49 дней. Складываемъ 9 съ 49-ю, будетъ 58, слѣд. 58-го апрѣля. Но такъ какъ въ апрѣлѣ только

30 дней, то эти 30 дней скидываемъ и получаемъ 28, слѣд. Троицынъ день 28-го мая.

Вопросъ на вычитаніе рѣшается такъ же. „Сегодня, 1-го мая, правятъ покойнику 40-й день. Когда онъ умеръ?“ Если сегодня 40-й день, то это значитъ, что съ момента кончины прошло 39 сутокъ. По общему правилу производимъ вычитаніе. 1-е мая замѣняемъ 31-мъ апрѣля, но такъ какъ 39 изъ 31 не вычитается, то 31-е апрѣля переводимъ въ числа марта, будетъ 62-е марта. 62 — 39 = 23, слѣд. истинный отвѣтъ — 23-е марта.

70. Задачи съ годами, мѣсяцами и днями. Сложеніе. „И. А. Крыловъ родился 2 февраля 1768 г. и прожилъ 76 л. 9 м. 7 дней. Когда онъ скончался?“ Наиболѣе доступнымъ для начальной школы объясненіемъ можетъ быть такое: И. А. Крыловъ родился 2 февр. 1768 г.; годъ ему исполнился 2 февр. 1769 г., 2 года — 2 февр. 1770 г.; мы къ 1768-ми прикладывали 1 г. и 2 г.; чтобы узнать, когда исполнилось ему не годъ и не два, а 76 лѣтъ, надо къ 1768 приложить 76, слѣд. 1-е дѣйствіе: 1768 + 76 = 1844, т.-е. 2 февр. 1844 г. ему исполнилось ровно 76 лѣтъ; но онъ прожилъ еще 9 мѣсяц.; начиная со 2 февр., 1 мѣсяцъ исполнился 2 марта, 2 мѣсяца 2 апрѣля, 3 мѣсяца 2 мая и т. д., 9 мѣсяц. 2 ноября. Итакъ, 2 ноября 1844 г. Крылову исполнилось 76 л. 9 мѣс.; но онъ еще прожилъ 7 дней; остается приложить еще 7 дней, и тогда получимъ окончательный отвѣтъ: 1844 г. 9 ноября. Все рѣшеніе задачи можно записать такими строками: 2 февр. 1768 г. присч. 76 л. = 2 февр. 1844 г.; 2 февр. 1844 г. присч. 9 мѣс. = 2 ноября 1844 г.; 2 ноября 1844 г. присч. 7 дней = 9 ноября 1844 г.

71. Вычитаніе. „Императоръ Петръ Великій скончался 28 янв. 1725 г., имѣя отъ роду 52 г. 7 м. 29 дней. Когда онъ родился?“ Какъ видно изъ условія, 28 янв. 1725 г. Петру Великому исполнилось 52 г. 7 м. 29 дней. Рѣшимъ первый вопросъ такой: когда ему исполнилось ровно 52 г. 7 м., безъ дней? Получится строка: 1725 г. 28 янв. отсч. 29 дн. = 1724 г. 30 дек. (здѣсь мы 28 янв. замѣняемъ 59-мъ декабря). Итакъ, Петру Великому исполнилось 30 дек. 1724 года ровно 52 г. 7 м. Теперь задаемся такимъ вопросомъ: когда ему исполнилось ровно 52 г.? Получаемъ вторую строку: 30 дек. 1724 г. отсч. 7 м. = 30 мая 1724 г. (1 мѣсяцъ назадъ — 30 ноября, 2 мѣс. назадъ — 30 окт. и т. д.) Слѣд. 30 мая 1724 г. Петру Великому исполнилось ровно 52 г. Теперь легко узнать, когда онъ родился: 30 м. 1724 г. отсч. 52 г. = 30 м. 1672 г.

Сравнивая ходъ рѣшенія обѣихъ предыдущихъ задачъ, мы видимъ, что въ сложеніи мы прибавляли сперва года, потомъ мѣсяцы, потомъ дни, въ вычитаніи же отнимали наоборотъ: сперва дни, потомъ мѣсяцы, потомъ года. Такая обратность совершенно понятна: вычитаніе обратно сложенію. Когда строятъ зданіе, то сперва кладутъ фундаментъ, потомъ строятъ стѣны, потомъ кроютъ крышу. Когда же разбираютъ зданіе, то сперва снимаютъ крышу, потомъ разбираютъ стѣны и, наконецъ, приступаютъ къ фундаменту.— До сихъ поръ, въ отвлеченныхъ и составн. имен. числахъ было безразлично, съ какихъ мѣръ или разрядовъ ни начинать сложеніе и вычитаніе. Отвѣтъ получался одинаковый. Для удобства, устное вычисленіе начинали съ высшихъ разрядовъ, а письменное съ низшихъ. Въ мѣрахъ времени не то. Благодаря неопредѣленности мѣръ времени (перемѣнное число дней въ году и въ мѣсяцѣ), съ измѣненіемъ порядка дѣйствія можетъ измѣниться и отвѣтъ. Это видно на слѣдующей задачѣ: „Сегодня 24 февр. 1900 г. Какое число будетъ черезъ 1 годъ 15 дней?“ Если сперва прибавить 1 годъ, потомъ къ полученному 15 дней, то отвѣтъ будетъ 12 марта 1901 г.; при этомъ въ февралѣ мы будемъ принимать 28 дней, такъ какъ это февраль 1901 года. Если же приложить сперва 15 дней, а потомъ къ полученному 1 годъ, то отвѣтъ обратится въ 11 марта 1901 г.; февраль будетъ содержать 29 дней, такъ какъ это будетъ февраль 1900 г., високоснаго года.

Отсюда видно, что при сложеніи и вычитаніи сост. им. чиселъ, выражающихъ время, надо держаться опредѣленнаго порядка. Нормальнымъ порядкомъ надо признать такой: при сложеніи прибавлять сперва года, потомъ мѣсяцы, потомъ дни, при вычитаніи же отнимать послѣдоватально дни, мѣсяцы и года. Что при вычитаніи надо поступать именно такъ, это доказывается и повѣркой задачъ при помощи сложенія. Если при вычитаніи начинать дѣйствіе съ годовъ, то по повѣркѣ можетъ оказаться, что отвѣтъ повѣрки не сошелся съ данными въ задачѣ числами.

72. Опредѣленіе промежутка времени. „Я родился 22 апр. 1877 г. Ск. мнѣ исполнилось лѣтъ, мѣсяцевъ и дней 2 янв. 1910 г.?“ День своего рожденія я праздную ежегодно 22 апр., и послѣдній разъ мнѣ исполнилось нѣсколько полныхъ лѣтъ 22 же апрѣля. Это случилось 22 апр. 1909 г. Ск. же мнѣ исполнилось лѣтъ? Рѣшеніе: 22 апр. 1909 г. отсч. 22 апр. 1877 г. = 32 г., слѣд. мнѣ исполнилось 32 года. Но сверхъ того я прожилъ нѣсколько цѣлыхъ мѣсяцевъ,

Цѣлые мѣсяцы истекаютъ для меня 22 числа. 22 декабря 1909 г. истекло 8 мѣс. Наконецъ, съ 22 дек. 1909 г. до 2 янв. 1910 г. прошло 11 дней. Всего 32 г. 8 м. 11 дней.

Десятичныя доли и метрическія мѣры.

73. Желательность этого отдѣла. Простѣйшія доли (между ними десятыя и сотыя), а также метрическія мѣры (метръ и граммъ) могутъ имѣть немаловажное значеніе въ обиходѣ грамотнаго человѣка. Желательно, чтобы про нихъ вела рѣчь и начальная школа. Эта желательность усиливается тѣмъ еще теоретическимъ интересомъ, который представляютъ десятичныя доли. Онѣ распространяютъ и уясняютъ понятіе о десятичной системѣ и даютъ возможность глубже вникнуть въ нумерацію многозначныхъ чиселъ.

74. Наглядное образованіе десятичныхъ долей. Процентъ. Пособіемъ, выясняющимъ происхожденіе и соотношеніе десятичныхъ долей, можно взять, напр., четвертинку бумаги; если ее разлиневать на 10 равныхъ продольныхъ полосъ, то каждая полоса представитъ собой десятую часть четвертинки. Затѣмъ стоитъ только разлиневать эту же четвертинку на 10 поперечныхъ полосъ, и получимъ 100 шашекъ, изъ которыхъ каждая явится сотой частью четвертинки. Ясно видно, что въ $^1/_{10}$ содержится $^{10}/_{100}$, въ $^2/_{10}$—$^{20}/_{100}$ и т. д. Пользуясь этимъ пособіемъ, продѣлываемъ нѣсколько примѣровъ на переводъ однѣхъ долей въ другія. Такъ, $^2/_{10} + {}^3/_{100} = {}^{23}/_{100}$, наоборотъ $^{37}/_{100} = {}^3/_{10} + {}^7/_{100}$.

Замѣтимъ, что понятіе о сотой части очень важно для рѣшенія задачъ на проценты. Подъ процентомъ можно разумѣть именно сотую часть количества. Напр., процентъ капитала — сотая часть капитала, 5 процентовъ числа жителей — 5 сотыхъ частей этого числа. Для яснаго представленія процента полезна та четвертинка, которая раздѣлена на 100 равныхъ частей. Сотая часть четвертинки и есть процентъ ея. Переходя къ рѣшенію задачъ на вычисленіе процентныхъ денегъ, остается упомянуть, что прибыль обыкновенно выражается въ процентахъ капитала и что эта прибыль высчитывается по годамъ, т.-е. пріурочивается къ опредѣленному сроку — году.

75. Письменное обозначеніе десятичныхъ долей. Бесѣду начинаемъ съ нумераціи цѣлыхъ чиселъ. Беремъ пучки соломы, которыми мы пользовались при нумераціи многозн. чиселъ. Пишемъ примѣръ, положимъ, 325 и выставляемъ 3 сотенныхъ пучка, 2 по

десятку и 5 простыхъ соломинокъ. На 1-мъ мѣстѣ съ лѣвой руки пишется обозначеніе самыхъ крупныхъ единицъ — сотенъ. За сотнями правѣе стоятъ десятки. Десятокъ въ 10 разъ меньше сотни. За десятками стоятъ простыя единицы. Простая единица въ 10 разъ меньше десятка. Такимъ образомъ мы видимъ, что чѣмъ правѣе мѣсто въ обозначеніи числа, тѣмъ соотвѣтствующія единицы мельче: за сотнями десятки, за десятками простыя единицы. „Но что же должно стоять за простой единицей?" — „То, что мельче ея въ 10 разъ: десятая часть ея". Соломинка дѣлится на 10 равныхъ частей и такихъ частей берется, положимъ, 2. Пишемъ цифру 2 рядомъ съ цифрой простыхъ единицъ, получаемъ 3 252. Но такимъ образомъ мы допустили ошибку: простыя единицы сдѣлались десятками. Чтобы подобная ошибка не случилась, цѣлыя отдѣляются отъ десятыхъ долей запятой. За десятыми долями стоятъ такія, которыя мельче ихъ въ 10 разъ, т.-е. сотыя, за сотыми тысячныя и т. д. Если требуется выговорить „3, 75", то мы читаемъ или „3 цѣлыхъ единицы, 7 десятыхъ и 5 сотыхъ", или же такъ: „3 цѣлыхъ и 75 сотыхъ", потому что $^7/_{10} + ^5/_{100} = ^{75}/_{100}$. Если цѣлыхъ единицъ нѣтъ, то на мѣстѣ ихъ ставится 0.

76. Сложеніе и вычитаніе. Въ десятичныхъ доляхъ эти дѣйствія производятся такъ же, какъ и въ цѣлыхъ числахъ. Вспоминая про цѣлыя числа, дѣти выведутъ правило и для десят. долей. Примѣръ: 2,288 + 3,367. Складывать начинаемъ съ низшихъ разрядовъ. Если единицъ низшаго разряда получится болѣе 10, то изъ нихъ образуемъ единицу высшаго разряда.

Кромѣ сложенія и вычитанія, можно бы еще показать умноженіе десятичной дроби на̂ цѣлое число. Остальныя же дѣйствія съ десятичными долями мало доступны для учениковъ начальной школы.

77. Метрическія мѣры. Наиболѣе употребительныя изъ этихъ мѣръ должны быть показаны, по возможности, наглядно. Не трудно приготовить метръ, съ его подраздѣленіями, дециметромъ ($^1/_{10}$ метра) и сантиметромъ ($^1/_{100}$ метра). Про метръ можно запомнить такую формулу: „метръ содержитъ полтора аршина безъ полутора вершковъ" (т.-е. $22^1/_2$ вершка). Километръ (1 000 метровъ) — почти верста. Граммъ — $^1/_4$ золотника. Если присоединить еще килограммъ (1 000 граммовъ), то этимъ и исчерпается группа наиболѣе необходимыхъ метрическихъ мѣръ. Подраздѣленія метра, дециметръ и сантиметръ, могутъ дать много упражненій съ десятичными долями.

РѢШЕНІЕ ЗАДАЧЪ*).

Виды задачъ.

78. Понятіе о задачѣ. Ариѳм. задачей называется числовой вопросъ, для рѣшенія котораго надо произвести одно или нѣсколько ариѳм. дѣйствій. Какія произвести дѣйствія, это или прямо указывается въ задачѣ, или же выводится изъ такъ называемаго условія задачи, т.-е. изъ тѣхъ соотношеній, въ какія поставлены данныя въ задачѣ величины. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ такъ наз. формулу, или числовую строку, во второмъ такъ наз. задачу съ условіемъ, или просто задачу.

79. Простыя задачи. Простой задачей называется такая, которая рѣшается однимъ дѣйствіемъ. Различается 11 видовъ простыхъ задачъ. Разсмотримъ ихъ по дѣйствіямъ.

Сложеніе. I видъ. Изъ данныхъ частей составляется цѣлое: „Въ саду 10 яблонь и 3 вишни. Ск. всего деревьевъ въ саду?“ II видъ. Опредѣляется число, которое больше даннаго на извѣстное количество единицъ: „Въ саду 10 яблонь; вишенъ же въ немъ на 3 больше, чѣмъ яблонь. Ск. вишенъ въ саду?“

Вычитаніе. I видъ. По цѣлому и одной части находится другая часть: „У мальчика было 10 коп., 5 коп. онъ истратилъ на орѣхи, а на остальныя деньги купилъ булку. Ск. онъ заплатилъ за булку?“ II видъ. Находится число, которое меньше даннаго на извѣстное количество единицъ: „Старшему брату 12 лѣтъ, а младшему на 3 года меньше. Ск. лѣтъ младшему брату?“ III видъ. Узнается, на сколько одно число больше другого: „Одному брату 12 лѣтъ, а другому 9. На ск. первый старше второго?“

Умноженіе. I видъ. По количеству равныхъ частей и по величинѣ части опредѣляется цѣлое: „Если въ день издерживать по 2 руб., то ск. рублей придется издержать въ недѣлю?“ II видъ. Находится число, которое больше даннаго въ извѣстное количество разъ: „Сыну 10 лѣтъ, а отецъ вчетверо старше его. Ск. лѣтъ отцу?“

Дѣленіе на части. I видъ. Цѣлое дѣлится на нѣсколько равныхъ

*) Въ I и II вып. методики даны нѣкоторыя указанія относительно рѣшенія задачъ. Они примѣнимы къ задачамъ простымъ и къ тѣмъ сложнымъ, которыя рѣшаются устно. Притомъ изъ сложныхъ задачъ въ I и во II годъ берутся большею частью задачи въ 2—3 дѣйствія. Въ III же годъ разрабатываются пріемы письменнаго рѣшенія задачъ, вводятся довольно трудныя задачи. — Настоящая глава имѣетъ цѣлью выяснить общіе пріемы рѣшенія задачъ, подвести подъ нихъ то, что указано для I и II года, и присоединить то, что необходимо для III года.

частей: „200 яблокъ разложено въ 4 одинаковыхъ корзины; сколько яблокъ положено въ каждую корзину?“ II видъ. Опредѣляется число, которое меньше даннаго въ извѣстное количество разъ: „Въ саду 10 яблонь, а вишенъ вдвое менѣе; ск. въ саду вишенъ?“

Дѣленіе по содержанію. I видъ. Цѣлое разлагается на данныя части; требуется опредѣлить число этихъ частей: „200 яблокъ разложено въ нѣсколько корзинъ, по 50 штукъ въ каждой; найти число корзинъ“. II видъ. Опредѣляется, во ск. разъ одно число больше другого: „Отцу 36 лѣтъ, а сыну 12; во ск. разъ отецъ старше сына?“

80. Сложныя задачи. Сложной задачей называется такая, которая рѣшается нѣсколькими дѣйствіями. Связь между данными числами сложной задачи можетъ быть очень разнообразна. Такъ же разнообразенъ и порядокъ дѣйствій, необходимыхъ для рѣшенія сложныхъ задачъ: одна задача можетъ потребовать совсѣмъ не той послѣдовательности дѣйствій, какой другая. Поэтому, раздѣлить всѣ сложныя задачи на виды невозможно. Но изъ массы сложныхъ задачъ можно выдѣлить нѣсколько особыхъ группъ, или типовъ. Къ каждой группѣ будутъ принадлежать задачи однородныя, схожія между собою или по способу рѣшенія, или по основной мысли. Такъ, особую группу могутъ составить всѣ вопросы, которые рѣшаются приведеніемъ къ единицѣ, — здѣсь сходство по способу рѣшенія; особую группу могутъ составить задачи на обмѣнъ, — здѣсь объединяющимъ средствомъ служитъ общая основная мысль, именно положеніе, что обмѣнъ предполагается безъ прибыли и убытка для заинтересованныхъ лицъ (если только особо не оговорено).

Подобныя задачи, составляющія особыя группы, или типы, мы будемъ называть типическими.

81. Задачи алгебраическаго характера. Во многихъ методикахъ принимается дѣленіе ариѳметическихъ задачъ на чисто ариѳметическія и на задачи алгебраическаго характера. Солидныхъ основаній для такого дѣленія нѣтъ. Можно дѣлить не задачи, а способы рѣшенія задачъ на ариѳметическіе и алгебраическіе. Къ послѣднимъ принадлежатъ всѣ тѣ, которые приводятъ къ рѣшенію уравненій, въ явной или скрытой формѣ. Тѣ задачи, которыя съ бо́льшимъ удобствомъ рѣшаются алгебраическими путями, можно, пожалуй, назвать задачами алгебраическаго характера; тогда тѣ, которыя легче рѣшаются ариѳметическими путями, будутъ называться чисто ариѳметическими. Но такъ какъ бо́льшая или меньшая легкость рѣшенія зависитъ отъ силъ рѣшающаго, то и это раздѣленіе задачъ опять-таки является шаткимъ.

Алгебраическіе способы рѣшенія не требуютъ обязательнаго присутствія неизвѣстнаго (икса). Сущность алгебраическихъ способовъ

состоитъ въ вычисленіяхъ съ общими количествами, которымъ въ каждомъ частномъ случаѣ можно давать опредѣленныя числовыя значенія. Представителемъ такого общаго количества является въ курсѣ начальной школы „условная единица", или „часть". Напримѣръ, въ задачѣ „раздѣлить рубль на двоихъ такъ, чтобы одному досталось вдвое болѣе другого" мы на второго кладемъ „часть", а на 1-го двѣ такихъ „части", или на одного одну „условную единицу", а на другого 2 „условныхъ единицы". Вотъ эта „часть" или „условная единица" не что иное, какъ алгебраическое количество. Этотъ способъ рѣшенія при помощи „частей" или „условныхъ единицъ" является алгебраическимъ способомъ, а эта задача можетъ служить примѣромъ задачи алгебраическаго характера, такъ какъ она съ большей легкостью рѣшается алгебраическимъ способомъ, чѣмъ чисто ариѳметическимъ, безъ „частей" или „условныхъ единицъ".

Способы рѣшенія.

82. Послѣдовательность въ усложненіи задачъ. Чтобы работа, какая бы то ни была, физическая или умственная, могла совершаться безъ чужой помощи и являться работой самого работника, необходимо, чтобы матеріалъ, надъ которымъ мы работаемъ, былъ приспособленъ къ нашимъ силамъ. И въ умственномъ трудѣ необходимо, чтобы матеріалъ для мысли возрасталъ вмѣстѣ съ ростомъ мысли, чтобы пріобрѣтеніе знаній увеличивало свою силу и быстроту вмѣстѣ съ накопленіемъ знаній. Отсюда вытекаетъ необходимость строгой послѣдовательности въ усложненіи того матеріала, который назначается для умственной работы; въ частности же мы выводимъ, что необходима строгая послѣдовательность въ усложненіи задачъ. Представимъ себѣ идеальнаго учителя математики, который умѣетъ совершенно соразмѣрять работу съ силами ученика. Такой учитель подбираетъ только матеріалъ для мысли, а ученикъ самъ его перерабатываетъ, самъ поднимается отъ низшей ступени до верха лѣстницы. Дѣятельность такого идеальнаго учителя будетъ, на видъ, скромна, но зато высоко-полезна. Вотъ къ идеалу такого учителя, все искусство котораго сосредоточено на подборѣ матеріала, и долженъ стремиться преподаватель ариѳметики, особенно же въ прикладной ея части, т.-е. при рѣшеніи задачъ. Постепенность усложненія задачъ требуетъ: a) чтобы извѣстный сортъ задачъ былъ пройденъ сперва на малыхъ числахъ, а потомъ уже продѣланъ и на большихъ; b) чтобы задачамъ отвлеченнымъ предшествовали соотвѣтственныя задачи на предметахъ; c) чтобы задачамъ обратнымъ предшествовали прямыя.

83. Синтетическое рѣшеніе задачъ. Вникнемъ теперь въ вопросъ: что значитъ рѣшить задачу? въ чемъ состоитъ рѣшеніе задачи? Изъ какихъ процессовъ мысли оно слагается? Беремъ примѣръ: „Пудъ овса стоитъ 40 коп. Ск. стоятъ 10 восьмипудовыхъ мѣшковъ овса?“ Условіе содержитъ въ себѣ 3 данныхъ: *a)* пудъ стоитъ 40 коп.; *b)* въ мѣшкѣ 8 пудовъ; *c)* мѣшковъ 10. Беремъ какія-нибудь 2 изъ этихъ данныхъ, но такія, чтобы они могли составить простую задачу; здѣсь простую задачу можно составить изъ данныхъ *a* и *b*, получается такая: „пудъ стоитъ 40 коп., въ мѣшкѣ 8 пуд., ск. стоитъ мѣшокъ?“

Этотъ вопросъ рѣшаемъ, получаемъ цѣну мѣшка — 3 руб. 20 коп. Теперь вновь полученное данное „цѣна мѣшка = 3 руб. 20 коп.“ сочленяемъ съ оставшимся даннымъ *c*, т.-е. съ тѣмъ, что „мѣшковъ 10“. Получаемъ 2-ю простую задачу: „Мѣшокъ стоитъ 3 руб. 20 коп., мѣшковъ 10, ск. они стоятъ?“ Рѣшаемъ этотъ вопросъ, отвѣтъ 32 руб. служитъ окончательнымъ отвѣтомъ нашей задачи. Теперь мы можемъ видѣть, изъ чего состоитъ рѣшеніе задачи. Оно состоитъ изъ сочетанія данныхъ, т.-е. соединенія или сложенія ихъ въ простыя задачи. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ данное *a* вмѣстѣ съ даннымъ *b* образовало 1-ю простую задачу, а вновь полученное данное вмѣстѣ съ даннымъ *c* — вторую простую задачу. Это сложеніе условій наз. синтезомъ. Благодаря синтезу, сложная задача приводится къ менѣе сложнымъ. Такъ, наша задача въ 2 дѣйствія, благодаря синтезу условія *a* съ условіемъ *b*, привелась къ задачѣ въ одно дѣйствіе.

Если бы мы изъ условій *a* и *b* не могли составить простой задачи, т.-е. не могли бы сказать, что именно можно узнать по этимъ даннымъ, то мы никогда не рѣшили бы и сложной задачи. Чтобы дойти до отвѣта сложной задачи, надо непремѣнно умѣть сочленять данныя и образовывать изъ нихъ простыя задачи. Этому умѣнью производить синтезъ надо учить и учить серіозно. Во всѣ три года школьнаго ученья, при всякомъ удобномъ случаѣ, надо приводить дѣтей къ тому, чтобы они по даннымъ въ условіи числамъ умѣли ставить вопросъ. Въ виду этого, въ простыхъ задачахъ очень полезно опускать вопросъ и давать задачи, напр., въ такой формѣ: „Въ одной книгѣ 100 страницъ, а въ другой 10. Что отсюда можно узнать?“ На это можетъ послѣдовать много отвѣтовъ. И чѣмъ больше, тѣмъ лучше. Если дѣти исчерпаютъ всѣ отвѣты, то этимъ они докажутъ свое полное знаніе синтеза, умѣнье образовывать изъ данныхъ чиселъ простыя задачи.

Не только въ вопросахъ на одно дѣйствіе, но и въ вопросахъ на 2, 3 и т. д. дѣйствій полезно производить синтетическій разборъ,

т.-е., установивши данныя, спрашивать, „что по нимъ можно опредѣлить?“

84. Неопредѣленность синтеза. Почему въ предыдущей задачѣ: „Пудъ стоитъ 40 коп. Ск. стоятъ 10 мѣшковъ по 8 пуд.?“ мы соединили данное „40 коп.“ съ даннымъ „8 пуд.“ и образовали изъ нихъ простую задачу? Да потому, что данное „40 коп.“ нельзя соединить съ даннымъ „10 мѣшковъ“. Но можно бы было количество „10 мѣшковъ“ заключить въ одну простую задачу съ количествомъ „8 пуд.“ Тогда 1-я простая задача была бы такая: „Ск. пудовъ въ 10 мѣшкахъ, если въ каждомъ по 8 пуд.?“ Тогда полученное число „80 пуд.“ пришлось бы сочленять съ числомъ „40 коп.“; этотъ синтезъ далъ бы такую простую задачу: „Ск. стоятъ 80 пуд., по 40 коп. за пудъ?“ Итакъ, синтезъ въ нашей задачѣ можетъ быть двоякій, слѣд. онъ неопредѣлененъ. Но эта неопредѣленность не мѣшаетъ дѣлу. Тѣмъ или другимъ путемъ, но мы дойдемъ до отвѣта задачи, притомъ рѣшимъ ее чисто синтетически, не прибѣгая ни къ какому другому разсужденію. Эта задача легка, и легка не тѣмъ, что въ ней мало дѣйствій, а тѣмъ, что въ ней нѣтъ синтеза лишняго, т.-е. нѣтъ такого сочетанія данныхъ, которое не приводило бы къ отвѣту задачи.

Но вотъ примѣръ задачи, въ которой можетъ встрѣтиться лишній синтезъ: „За 3 фунта пряниковъ мальчикъ заплатилъ 75 коп. Ск. такихъ пряниковъ дали бы ему на рубль?“ Въ задачѣ 3 данныхъ: *a)* 3 фунта, *b)* 75 коп., *c)* 1 рубль. Если ученикъ соединитъ въ простую задачу *a* съ *b*, то этотъ синтезъ будетъ удачнымъ. Но если онъ попытается соединить *b* съ *c*, то этотъ синтезъ будетъ лишнимъ; получится, напр., такая простая задача: „На ск. мальчикъ заплатилъ во 2-й разъ дороже, чѣмъ въ 1-й?“ Эта простая задача нисколько не помогаетъ рѣшенію сложной, такъ какъ ея отвѣтъ (25 коп.) ни съ чѣмъ не сочленяется. Приходится ученику отбрасывать лишній синтезъ, возвращаться къ началу задачи и искать такихъ сочетаній, отвѣты на которыя могли бы, въ свою очередь, соединяться съ другими данными и приводить къ окончательному отвѣту задачи.

Итакъ, нѣкоторыя задачи не допускаютъ лишняго синтеза. Онѣ прямо и вѣрно рѣшаются чисто синтетическимъ путемъ. Для такихъ задачъ ученику достаточно одного: пусть онъ умѣетъ по даннымъ числамъ ставить вопросъ.

Въ другихъ же задачахъ лишній синтезъ встрѣчается. Въ такомъ случаѣ, чтобы скорѣе и вѣрнѣе прійти къ синтезу необходимому и,

слѣд., къ рѣшенію задачи, можно пользоваться разборомъ обратнымъ, именно анализомъ.

85. Аналитическій разборъ задачи. Въ основѣ всякаго синтеза лежитъ сложеніе, въ основѣ же анализа — разложеніе. При синтезѣ данныя въ задачѣ величины постепенно слагаются въ простыя задачи, съ тѣмъ чтобы прійти къ окончательному вопросу сложной задачи. При анализѣ, наоборотъ, разлагается вопросъ сложной задачи, съ тѣмъ чтобы прійти къ даннымъ. Примѣръ полнаго анализа данъ во II вып. методики, § 94. Возьмемъ еще примѣръ. „За 3 фунта пряниковъ мальчикъ заплатилъ 75 коп. Ск. такихъ пряниковъ дали бы ему на рубль?" Аналитическій разборъ долженъ быть таковъ: „Намъ надо узнать, ск. фунтовъ пряниковъ получитъ мальчикъ. Для этого достаточно знать: a) сколько онъ заплатилъ за покупку и b) сколько стоитъ фунтъ. Но сколько стоитъ покупка, — мы знаемъ: 1 руб.; остается узнать, ск. стоитъ фунтъ. Для этого достаточно знать, сколько стоитъ какое-нибудь опредѣленное число фунтовъ; это намъ надо: за 3 фунта заплачено 75 коп." Этимъ анализъ кончается. Сложный вопросъ мы разложили на простые, на такіе, которые рѣшаются однимъ дѣйствіемъ. — Въ подобной полной формѣ аналитическій разборъ ведется рѣдко. Къ нему не обращаются дѣти, если учитель ихъ не заставляетъ. Причина заключается въ сложности и въ трудности подобнаго разбора. Онъ полезенъ лишь, какъ новая форма логическаго мышленія и какъ освѣщеніе синтетическаго пути. Лучшее ему мѣсто — въ тѣхъ задачахъ, которыя уже рѣшены синтетически. Анализъ задачи, послѣ того какъ она уже рѣшена, не труденъ и доступенъ для дѣтей; онъ уясняетъ и дополняетъ синтезъ.

86. Сокращенный анализъ. Въ большинствѣ случаевъ анализъ задачъ дѣтьми производится, но сокращенный. Они его ведутъ, обыкновенно, молча, про себя, часто смутно, т.-е. со скачками въ логическомъ мышленіи, съ отклоненіями въ сторону и отступленіями назадъ. Это именно та работа мысли, когда про дѣтей говорятъ: „они разбираютъ задачу" или „они обдумываютъ рѣшеніе". Сокращенный анализъ въ наиболѣе правильной формѣ долженъ состоять въ слѣдующемъ: сложная задача расчленяется не на простыя, какъ въ полномъ анализѣ, а на двѣ менѣе сложныхъ. Примѣръ: „Купецъ смѣшалъ 2 ящика чаю: въ первомъ было 30 фунт., во 2-мъ на 5 фунт. менѣе 1-го. Фунтъ 1-го ящика стоитъ 2 руб., фунтъ 2-го 1 руб. 80 коп. Что стоитъ фунтъ смѣшаннаго чаю?"

Эта задача разлагается на двѣ: въ одной содержится уменьшеніе числа (30—5), а въ другой употребительный вопросъ на смѣшеніе (смѣшано столько-то фунт., по стольку-то руб. за фунтъ, со столькими-то фунт., по стольку-то руб. за фунтъ; что стоитъ фунт. смѣси?). Сокращенный анализъ, при которомъ сложная задача расчленяется на двѣ менѣе сложныхъ, пригоденъ и употребителенъ во многихъ случаяхъ, если выполняется основное требованіе, изложенное въ § 82—постепенное усложненіе условій задачъ. При послѣдовательномъ усложненіи задачъ, каждая новая задача является суммой какой-нибудь предыдущей задачи и какого-нибудь добавочнаго условія. Анализъ устремляется на то, чтобы разложить эту новую задачу на какую-нибудь извѣстную задачу и добавочное условіе.

87. Сравненіе синтеза съ анализомъ. Анализомъ рѣшить задачи нельзя, можно лишь разложить ее на простыя, съ тѣмъ, чтобы складывая потомъ эти простыя задачи, дойти до вопроса сложной задачи. Синтезомъ рѣшить можно, или прямо, или путемъ нѣкоторыхъ попытокъ. Прямо тогда, когда задача не содержитъ лишняго синтеза. Путемъ попытокъ тогда, когда данныя въ задачѣ величины могутъ входить въ такія сочетанія, которыя не ведутъ къ рѣшенію задачи. Чтобы сдѣлать попытки болѣе вѣрными и, слѣд., уменьшить ихъ число, мы должны пользоваться анализомъ.

Такимъ образомъ, ни синтезъ отдѣльно, ни тѣмъ болѣе анализъ отдѣльно не могутъ считаться пріемами рѣшенія задачъ. Задачи должны рѣшаться совмѣстнымъ примѣненіемъ анализа и синтеза. Въ синтезѣ задача нуждается прежде всего. Отсюда ясно видно, насколько важно научить дѣтей тому, чтобы они по даннымъ числамъ могли ставить вопросъ. Анализъ для большинства задачъ полезенъ тѣмъ, что сокращаетъ число синтетическихъ попытокъ и быстрѣе и вѣрнѣе приводитъ къ цѣли.

Въ нѣкоторыхъ методикахъ анализъ противоставляется синтезу. Чтобы научить дѣтей рѣшенію задачъ, совѣтуютъ пріучать ихъ къ аналитическому разбору задачъ.

Несомнѣнно, умѣніе анализировать существенно помогаетъ рѣшенію задачъ. Но, пріучая къ анализу, мы тѣмъ болѣе должны пріучить къ синтезу. Анализъ и синтезъ взаимно обратны. Правильный методъ долженъ начать съ прямого дѣйствія—синтеза, чтобъ тѣмъ легче было развить обратное — анализъ. Ограничиваться же обратнымъ дѣйствіемъ, въ надеждѣ, что усвоеніе обратнаго дѣйствія попутно, само собой, вызоветъ усвоеніе прямого, — рискованно. Итакъ,

весьма желательно пріучить дѣтей къ разбору задачъ. Но это пріученіе будетъ одностороннимъ, если мы разовьемъ только привычку къ анализу, не образовывая привычки къ синтезу.

Многіе склонны думать, что анализъ отличается большею опредѣленностью, въ то время, какъ синтезъ неопредѣлененъ. Это недоразумѣніе. И синтетическій пріемъ можетъ быть опредѣленнымъ, когда въ задачѣ нѣтъ лишняго синтеза. И анализъ можетъ быть неопредѣленнымъ. Напр., въ разобранной выше задачѣ „3 ф. пряниковъ стоятъ 75 коп. Ск. такихъ пряниковъ дали мальчику на рубль?“ анализъ начинается съ вопроса: что нужно знать, чтобы рѣшить, ск. фунт. пряниковъ получилъ мальчикъ? Отвѣтъ можетъ послѣдовать такой: чтобы знать, ск. фунт. получилъ мальчикъ, достаточно знать, ск. фунтовъ было у продавца и ск. осталось, послѣ того какъ мальчикъ купилъ. Разумѣется, это рѣшеніе непригодно для рѣшенія задачи, но оно логически правильно. Его, какъ непригодное, надо отвергнуть и начать анализъ снова. Слѣд., и анализъ допускаетъ, подобно синтезу, попытки, а потому и онъ не вполнѣ опредѣлененъ.

Примѣрное рѣшеніе сложныхъ задачъ.

88. Задача I. „Мельничное колесо дѣлаетъ 9 135 оборотовъ въ 4 часа 21 мин. Ск. оборотовъ дѣлаетъ оно въ 1 часъ 25 м.?“

Условіе задачи читается не сразу. Данныя читаются постепенно, чтобъ ученики могли въ это время произвести синтетическій разборъ. Учитель начинаетъ: „Мельничное колесо дѣлаетъ 9 135 оборотовъ“. Пишетъ эти слова сокращенно на классной доскѣ. „Что изъ этого можно узнать?“—„Ничего“. Учит. продолжаетъ говорить: „въ 4 час. 21 мин.“ Пишетъ эти слова на кл. доскѣ, начиная съ новой строки. „Что можно узнать изъ 2-й строки?“—„Ск. минутъ въ 4 ч. 21 м.“ Этотъ отвѣтъ дѣти должны дать обязательно. Если они не могутъ отвѣтить на такой вопросъ, то сложную задачу имъ не рѣшить ни за что. Учит. можетъ помочь такъ: „сказано: 1 п. 10 ф. — что изъ этого можно узнать?“, т.-е. вопросъ приводится учителемъ къ болѣе употребительнымъ мѣрамъ и къ болѣе легкимъ числамъ.

Бесѣда продолжается: „Что узнаете изъ 1-й и 2-й строки?“ — „Ск. оборотовъ дѣлаетъ колесо въ минуту“. (Если не скажутъ, то спросить на легкихъ числахъ: „въ 10 мин. 60 оборотовъ; что отсюда узнаете?“) Далѣе читается и записывается 3-й строкой вопросъ

задачи. „Что узнаете изъ 3-й строки? — „Ск. минутъ въ 1 часѣ 25 мин.“ — „Что узнаете изъ 1-й и 3-й строки? — „Ничего“. — „Изъ 2-й и 3-й? — „На сколько одинъ промежутокъ больше другого“. Этимъ заканчивается синтетическій разборъ задачи. (Условіе ея затѣмъ повторяется въ цѣлости.) Ученики изслѣдовали всѣ сочетанія, въ которыя могутъ войти данныя въ задачѣ числа. Нѣкоторыя изъ этихъ сочетаній излишни, напр. сравненіе одного промежутка съ другимъ. Дѣло дѣтей заключается въ томъ, чтобы изъ всѣхъ возможныхъ сочетаній выбрать тѣ, которыя дѣйств. нужны. Эту работу они исполняютъ молча, самостоятельно; обдумавши, т.-е. произведя сокращенный анализъ, они записываютъ первую строку рѣшенія. Учитель въ это время или отходитъ къ другой группѣ, или помогаетъ болѣе слабымъ: повторяетъ съ ними синтезъ. Когда большая часть учениковъ рѣшила, 1-е дѣйствіе объясняется. Къ отвѣту приписывается его наименованіе, т.-е. то, что онъ обозначаетъ. Если большинство написало 1-е дѣйствіе неправильно, то наведеніе мы употребляемъ такое: „Прочитай 2-ую строку условія!“ „Что изъ нея можно узнать?“ Переходимъ ко 2-му дѣйствію. Ученики должны ясно представлять себѣ, какая задача у нихъ теперь получилась. Задача такая: „Въ 261 минуту колесо обернулось 9135 разъ. Ск. разъ обернется оно въ 1 часъ 25 мин.?“ Хорошо, если ученики изложатъ эту остающуюся задачу связно Иначе надо помочь такъ: „Читай строку, которую ты получилъ!“ — „Колесо дѣлало обороты въ продолженіе 261 минуты“. — „Читай ту строку, которая еще не входила у насъ въ вычисленіе!“ — „9135 оборотовъ“ — „Читай вопросъ задачи!“ Такъ и во всѣхъ подобныхъ случаяхъ, когда рѣчь идетъ объ остающейся задачѣ, ученикъ долженъ вспомнить о вопросѣ задачи, о тѣхъ строкахъ условія, которыми онъ не воспользовался, и о той, которую только что получилъ.

Второе дѣйствіе ученики производятъ также самостоятельно. Если они рѣшили невѣрно, то учитель заставляетъ прочитать строки: „9135 разъ“ и „въ 261 мин.“, спрашиваетъ „что отсюда можно узнать?“ и заставляетъ узнать. Получается дѣйствіе: 9 135 : 261 = 35 оборотовъ дѣлаетъ колесо въ минуту. Затѣмъ дѣти припоминаютъ, какая осталась у нихъ задача. Если ошибаются, то учитель заставляетъ прочесть вопросъ задачи и ту строку, которая только что получилась; строкъ, которыми не пользовались, теперь уже не осталось. Получается задача: „Въ минуту колесо дѣлаетъ 36 оборотовъ, ск. оборотовъ сдѣлаетъ оно въ 1 ч. 25 м.?“ Третье дѣйствіе

ученики производятъ самостоятельно. Если они дѣлаютъ не то, что надо, то теперь умѣстны будутъ аналитическіе наводящіе вопросы: задача подходитъ къ концу и анализъ становится для дѣтей незатруднительнымъ. Вопросы могутъ быть такіе: „Что спрашивается въ задачѣ?“ „А что вы до сихъ поръ узнали?“ „Что же остается узнать?“

Послѣ того какъ задача будетъ рѣшена, полезно прочитать еще разъ все рѣшеніе. Слабымъ ученикамъ не мѣшаетъ предложить нѣсколько бѣглыхъ вопросовъ, чтобы убѣдиться, все ли ими понято.

89. Задача II. „Рельсъ, длиною въ 2 саж., вѣситъ 8 пудовъ. Пудъ рельсоваго желѣза стоитъ 90 коп. Что стоятъ рельсы, уложенные на версту (въ 2 ряда)?“

Учитель читаетъ задачу раздѣльно. Данныя записываетъ на кл. доскѣ. Учитель начинаетъ: „Рельсъ длиною въ 2 сажени“. Записываетъ самъ или же велитъ ученику записать. „Что изъ этого можно узнать?“ Отвѣтить могутъ такъ: „Ск. въ 2 саж. аршинъ“. Учитель продолжаетъ: „вѣситъ 8 пудовъ“. Пишетъ это особой строкой, подъ 1-й строкой. „Что можно вывести изъ написанныхъ 2 строкъ?“ — „Ск. вѣситъ сажень рельсовъ“. Такимъ образомъ мы произвели сочетаніе, или синтезъ, 1-го даннаго, т.-е. „2 саж.“, со 2-мъ, т.-е. „8 пуд.“ Чтеніе условія продолжается: „Пудъ рельсоваго желѣза стоитъ 90 коп.“ Когда 3-е данное будетъ записано особой строкой подъ 2-мъ даннымъ, то сочленяемъ это 3-е данное съ первыми двумя такъ: „Что можно узнать изъ 1-й и 3-й строки?“—„Ничего“. Если бы дѣти задумались надъ сочетаніемъ этихъ 2 данныхъ, то пришлось бы обратиться къ какой-нибудь подходящей легкой задачѣ, которую и разобрать наглядно. Изъ синтеза 2-й строки съ 3-й можно узнать слѣдующее: ск. стоитъ рельсъ. Теперь всѣ три данныя продиктованы и записаны. Дѣти связывали эти данныя во всѣхъ возможныхъ сочетаніяхъ. Если они уже привыкли къ подобному связыванію, то нѣтъ нужды въ постоянныхъ вопросахъ учителя „что отсюда можно узнать?“ Достаточно, если учитель будетъ только указывать тѣ строки, которыя слѣдуетъ сочетать. Съ теченіемъ времени и это становится излишнимъ. Ученики привыкаютъ вести синтетическій разборъ самостоятельно. Имъ надо внушить, что и при всякой задачѣ, которую они рѣшаютъ, положимъ, безъ учителя, они должны предварительно обозрѣть, какія данныя можно сочетать, и что вытекаетъ изъ этого сочетанія.

Синтетическій разборъ задачи не то, что ея планъ. Въ планѣ точно указывается, что мы сперва узнаемъ, что потомъ, что далѣе, что въ концѣ. Если устанавливать предварительный планъ, то надо имѣть въ виду слѣдующее: не обратить бы рѣшеніе задачъ въ простое запоминаніе, вмѣсто разсужденія. А это легко можетъ случиться, если планъ будетъ установленъ учителемъ съ помощью лишь лучшихъ учениковъ, остальнымъ придется запомнить порядокъ рѣшенія и потомъ вычислить какъ бы по данному рецепту. Но, вѣдь, при рѣшеніи задачъ, не то важно, чтобы запомнить, а то, чтобы додуматься самому. Синтетическій разборъ, въ противоположность плану, не даетъ дѣтямъ готоваго порядка рѣшенія, не указываетъ прямого пути. Онъ предоставляетъ на выборъ возможныя сочетанія и предлагаетъ подумать самостоятельно, какими изъ этихъ сочетаній можно воспользоваться. Итакъ, теперь данныя величины указаны и разобраны, остается сообщить вопросъ: „сколько стоятъ рельсы, уложенные на версту въ 2 ряда?“ Вопросъ задачи также записывается на кл. доскѣ. Если бы вопросъ прямо вытекалъ изъ содержанія задачи, то полезно было бы предоставить дѣтямъ вывести вопросъ изъ содержанія задачи. Но въ нашемъ случаѣ едва ли можно такъ поступить. Въ вопросѣ „сколько стоятъ рельсы, уложенные на версту въ 2 ряда?“ заключается, собственно говоря, кромѣ вопроса, еще 2 данныхъ: a) что рельсы уложены на версту, т.-е. на 500 саж., b) что они уложены въ 2 ряда. Оба эти данныхъ можно бы приписать къ тѣмъ тремъ, которыя помѣщены выше (2 саж., 8 пуд., 90 коп.), и ввести въ сочетаніе съ ними. Но при этомъ необходимо имѣть въ виду то, чтобы многочисленность сочетаній не утомила дѣтей. (Если изъ вопроса задачи выдѣлить эти два данныхъ, то получится вопросъ уже въ такой формѣ: „Сколько стоятъ всѣ эти рельсы?“)

Когда условіе задачи продиктовано и записано, его надо повторить еще разъ, чтобы дѣти его усвоили. Повторять они могутъ по записи.

Приступаемъ къ рѣшенію. Помощь учителя здѣсь уже излишня. Не требуется ни вопросовъ, ни наведеній. Подготовка уже сдѣлана при помощи синтетическаго разбора, и пусть теперь дѣти подумаютъ самостоятельно и порѣшаютъ. Учитель говоритъ: „произведите первое дѣйствіе!“ Самъ отходитъ къ другимъ группамъ, для провѣрки самостоятельныхъ работъ, или же дѣлаетъ указанія слабѣйшимъ ученикамъ. Дѣти думаютъ надъ задачей молча, само-

стоятельно; они выбираютъ необходимыя сочетанія, а для этого имъ нуженъ, хотя краткій, анализъ. Здѣсь именно мѣсто анализу. У нихъ должна получиться такая запись: „8 : 2 = 4 п. вѣситъ 1 саж.“ Тотъ, кто сдѣлалъ, даетъ знать объ этомъ учителю, поднимая руку или вставая. Когда большинство рѣшило и подняло руку, запись выносится на кл. доску и объясняется. При этомъ надо особенно постараться о томъ, чтобы и слабые ученики поняли, для чего употреблено дѣйствіе. Можетъ случиться, что нѣкоторыя дѣти примутъ за 1-е дѣйствіе не 8 : 2 = 4, а „90 × × 8 = 720 коп. стоитъ рельсъ“. Это дѣйствіе вполнѣ умѣстно для данной задачи. Но учителю не выгодно допускать, чтобы отдѣльные ученики рѣшали различно: этимъ затрудняется повѣрка. Поэтому можно поступить такъ: отложить иной порядокъ рѣшенія до тѣхъ поръ, пока не кончена будетъ вся задача; тогда про него обязательно вспомнить и разобрать; теперь же направить дѣтей на одинаковый путь рѣшенія. Можетъ случиться, что большая часть учениковъ ошибется въ первомъ дѣйствіи или просто ничего не напишетъ. Въ этомъ случаѣ лучшее наведеніе — повтореніе синтеза, но только уже въ болѣе тѣсныхъ рамкахъ. Учитель указываетъ дѣтямъ тѣ строки условія, которыми можно воспользоваться для 1-го дѣйствія, и заставляетъ по этимъ даннымъ поставить вопросъ 1-го дѣйствія. „Прочитай 1-ю строку!“ Ученикъ читаетъ: „рельсъ длиною 2 саж.“ — „Прочитай вторую строку!“ Тотъ читаетъ: „вѣситъ 8 пуд.“ — „Что можно узнать изъ этихъ 2 строкъ?“ — „Сколько пуд. вѣситъ 1 саж.“ — „Узнайте и запишите!“ Если бы затрудненіе случилось ближе къ концу сложной задачи, то можно бы воспользоваться анализомъ вопроса, т.-е. натолкнуть дѣтей на ходъ рѣшенія разборомъ вопроса. Вообще, въ наводящихъ вопросахъ учителю надо каждый разъ выбирать, что̀ въ данномъ случаѣ удобнѣе для наведенія: синтезъ или анализъ. Итакъ, первое дѣйствіе произведено, записано и объяснено. Какая же задача осталась намъ теперь для рѣшенія? Она уже менѣе сложна, чѣмъ первоначальная, такъ какъ включаетъ въ себѣ однимъ дѣйствіемъ меньше. Желательно, чтобы дѣти могли представить себѣ и выразить эту оставшуюся сложную задачу: „1 саж. вѣситъ 4 пуда, пудъ стоитъ 90 коп., сколько стоитъ верста рельсовъ, уложенныхъ въ 2 ряда?“ Но не всегда дѣтямъ удается выразить оставшуюся сложную задачу, такъ какъ не сразу они къ подобному дѣлу привыкаютъ. Поэтому учитель указываетъ тотъ общій порядокъ, кото-

рымъ производится выдѣленіе оставшейся сложной задачи. Онъ таковъ: надо прочитать тотъ выводъ, который только что получился („1 саж. вѣситъ 4 п.“), прочитать тѣ строки условія, которыя еще не приняты во вниманіе („пудъ стоитъ 90 коп.“), и, наконецъ, вопросъ задачи („сколько стоитъ верста въ 2 ряда“). Подобнаго чтенія обыкновенно бываетъ достаточно для того, чтобы дѣти представили себѣ оставшуюся сложную задачу.

Приступаемъ ко 2-му дѣйствію. Дѣти обдумываютъ его, производятъ самостоятельно и записываютъ: „$90 \times 4 = 3$ р. 60 к. стоитъ 1 саж. рельсовъ“. Участіе преподавателя выражается въ той же формѣ, какъ и при первомъ дѣйствіи.

Послѣ 2-го дѣйствія опять необходимо установить, какая осталась сложная задача. Теперь всѣ три строки условія приняты были во вниманіе, поэтому дѣти читаютъ выводъ 2-го дѣйствія „3 р. 60 к. стоитъ 1 саж. рельсовъ“ и вопросъ сложной задачи „сколько стоитъ верста въ 2 ряда“. Сочетанія этихъ строкъ для насъ достаточно. Двигаемся далѣе и получаемъ 3-е дѣйствіе съ такой записью: „3 р. 60 к. $\times 500 = 1800$ р.“ Производится и записывается 3-е дѣйствіе въ томъ же порядкѣ, какъ и 1-е и 2-е. Если бы дѣти затруднились въ 3-мъ дѣйствіи, то навести ихъ можно аналитически, при помощи вопроса задачи, такъ какъ рѣшеніе близится къ концу и анализъ является, слѣд., посильнымъ. Учитель ведетъ такой разговоръ: „Что спрашивается въ задачѣ?“ „Чтобы узнать стоимость версты рельсовъ въ 2 ряда, что предварительно надо узнать?“ — „Стоимость версты рельсовъ въ 1 рядъ“. — „А чтобы узнать стоимость версты, что достаточно для этого узнать?“— „Стоимость сажени“. Такимъ образомъ дѣти приходятъ къ извѣстной величинѣ, стоимости сажени (3 р. 60 к.), а отъ нея уже переходятъ и къ стоимости версты.

4-мъ дѣйствіемъ является, наконецъ, такое: „$1\,800 \times 2 = 3\,600$ р. стоитъ верста рельсовъ въ 2 ряда“. Этимъ задача оканчивается. Остается повторить объясненіе, если задача оказалась трудной. Можно разобрать другіе способы рѣшенія. Можно сдѣлать какія-нибудь дополненія къ рѣшенію, о чемъ будетъ рѣчь ниже (§ 96).

90. Задача III. „Два землекопа начали копать ровъ, длиною въ 1 версту, съ противоположныхъ концовъ. Первый вырываетъ въ день 2 сажени, а второй 5 аршинъ. Черезъ сколько дней разстояніе между землекопами уменьшится до 60 саженъ?“

Выше мы уже сказали, что рѣшеніе задачъ непремѣнно надо-

сопровождать разборомъ, что разборъ этотъ можетъ быть синтетическимъ и аналитическимъ, и наконецъ примѣняться тотъ или другой видъ разбора можетъ въ разныхъ задачахъ въ разной степени, въ зависимости отъ задачъ. Анализъ болѣе подходитъ къ тѣмъ сложнымъ задачамъ, которыя довольно скоро распадаются на менѣе сложныя задачи. Синтезъ же полезенъ тогда, когда данныя числа допускаютъ не особенно много комбинацій и эти комбинаціи съ успѣхомъ сокращаютъ задачу и приводятъ ее къ менѣе сложной. Вообще говоря, при началѣ разбора и рѣшенія болѣе полезенъ синтетическій пріемъ, а при концѣ аналитическій.

Такъ вотъ и въ данной задачѣ. Чтеніе условія сопровождаемъ синтетической проработкой. Учитель начинаетъ —„Два землекопа начали копать ровъ, длиною въ 1 версту"—и спрашиваетъ —„что вытекаетъ изъ этихъ данныхъ?" Нѣкоторые, менѣе осторожные ученики пожалуй скомбинируютъ „2 землекопа" и „1 версту" и скажутъ, что на каждаго землекопа приходится по $^1/_2$ версты. Но вѣдь въ задачѣ не сказано, что землекопы работаютъ одинаково, слѣд. высказанное предположеніе невѣрно. Такимъ образомъ, предварительныя попытки синтеза предостерегаютъ отъ ошибокъ при рѣшеніи, благодаря разъясненіямъ учителя.—„Итакъ, что же вытекаетъ изъ этихъ данныхъ?"—„Ничего". Учитель сообщаетъ далѣе:— „первый вырываетъ въ день 2 сажени, а второй 5 арш."— Замѣтимъ, что здѣсь сразу сообщается 2 данныхъ, и это потому, что при нѣкоторомъ навыкѣ въ синтезѣ, дѣло можетъ итти живѣе, да и разбираться сразу съ 2 данными ученикамъ уже будетъ подъ силу, когда они попривыкнутъ къ синтетической работѣ. Итакъ, 2 данныхъ сообщены, и ставится вопросъ —„что можно вывести изъ всѣхъ данныхъ чиселъ?—Это вопросъ болѣе общій, сравнительно съ тѣми, какіе ставились въ I и II задачѣ и оправдывается онъ опять требованіемъ поступательности. Отвѣчаютъ на него такъ:—„можно узнать, сколько арш. вырываютъ оба землекопа вмѣстѣ".—„Еще что можно узнать?"—„Во сколько времени 1-й землекопъ можетъ вырыть весь ровъ".—„Еще что?"—„Во сколько времени 2-й землекопъ можетъ вырыть весь ровъ".—„Еще что?"—„Во сколько разъ 1-й работаетъ успѣшнѣе 2-го".—Могутъ встрѣтиться и другіе отвѣты, являющіеся сочетаніемъ данныхъ чиселъ. Если нѣкоторые изъ этихъ отвѣтовъ и не ведутъ къ рѣшенію нашей сложной задачи, то все же они полезны, такъ какъ умѣнье комбинировать пригодится для другихъ сложныхъ задачъ. Само собой разумѣется, что если ученики при-

водятъ только комбинаціи, которыя ведутъ къ рѣшенію нашей сложной задачи, то излишне было бы требовать комбинацій всѣхъ другихъ, слѣд. и не ведущихъ къ рѣшенію: это значило бы сбивать учениковъ съ того молчаливаго анализа, который позволилъ имъ отличить нужныя комбинаціи отъ лишнихъ.

Всѣ предыдущіе вопросы, начиная съ вопроса — „сколько арш. вырываютъ оба землекопа вмѣстѣ“ — можно тутъ же и рѣшать устно. Во-первыхъ, это полезно для устнаго счета, во-вторыхъ, можетъ пригодиться для рѣшенія нашей сложной задачи и, въ третьихъ, даетъ возможность узнать, насколько сознательно относятся ученики къ тѣмъ комбинаціямъ, которыя они предлагаютъ. Мы говоримъ „устно“, а не „письменно“ потому, что записываніе лишнихъ комбинацій можетъ внести сбивчивость въ строки рѣшенія задачи, когда дойдетъ дѣло до письменнаго рѣшенія задачи.

Во всѣхъ предыдущихъ сочетаніяхъ ученики говорили только тѣ свои предположенія, которыя приводятъ къ одному дѣйствію. Когда эти предположенія исчерпаны и разобраны, можно допустить отвѣты, содержащіе въ себѣ два и даже болѣе дѣйствій. Этимъ будетъ поощряться способность комбинированія и заготовляться матеріалъ для рѣшенія сложной задачи. Учитель ведетъ дѣло такъ: — „какіе выводы вы можете сдѣлать во-вторыхъ?“ — „Черезъ сколько дней будетъ вырыта канава 2 землекопами“. — „Какія дѣйствія нужны для рѣшенія этого вопроса?“ — „Сложеніе и дѣленіе“. — Учитель освѣдомляется о дѣйствіяхъ съ той цѣлью, что въ противномъ случаѣ ученики пожалуй станутъ приводить предположенія наудачу и будутъ упоминать такія, которыхъ и сами разрѣшить не въ силахъ.

При затрудненіяхъ во всѣхъ предыдущихъ вопросахъ употребляется обыкновенное средство наведенія, т.-е. вопросъ дается съ небольшими легкими числами, а если можно, то и наглядно.

Учитель читаетъ конецъ задачи: — „черезъ сколько дней разстояніе между землекопами уменьшится до 60 саж.?“ — Можетъ быть, придется объяснить смыслъ словъ „уменьшится до 60 саж.“ Затѣмъ слѣдуетъ вопросъ: „какое число сейчасъ вамъ дано и что оно значитъ?“ — „60 саж., такое разстояніе останется недокопаннымъ“. — „Что же узнаете вы изъ всѣхъ чиселъ, которыя даны до сихъ поръ въ задачѣ?“ — „Сколько саж. канавы надо вырыть“. — „Сколько же?“ — „440“. — „Дальше что можно узнать?“ — „Во сколько дней выроютъ землекопы канаву въ 440 саж.“ — „Какими дѣйствіями узнаете?“ — „Сложеніемъ и дѣленіемъ“.

На этомъ синтетическую проработку можно окончить, и письменное рѣшеніе предоставляется ученикамъ. Какъ видно, эта форма комбинированія представляетъ нѣсколько отличій отъ той, какая проведена въ I и II задачѣ. Ее можно поставить на болѣе высокую ступень, сравнительно съ той, и примѣнять тогда, когда ученики попривыкнутъ къ первоначальной формѣ.

Аналитическіе вопросы въ данной задачѣ хороши опять-таки недалеко отъ конца. Именно, когда ученики скажутъ —„можно узнать, во сколько дней выроютъ канаву оба землекопа“,— учитель переводитъ дѣло на настоящій вопросъ задачи: —„а у насъ всю ли канаву требуется вырыть?“—„Что же нужно знать, чтобы вычислить количество дней?“ —„Надо знать длину канавы и то, на сколько подвигается работа въ день“.

Подробности рѣшенія.

91. Чтеніе условія задачи. Условіе можно читать, конечно, и по книгѣ. Но такой порядокъ, какой примѣненъ выше, болѣе содѣйствуетъ пониманію задачъ: отдѣльныя строки условія не смѣшиваются одна съ другой, ихъ удобно брать для соединенія, т.-е. для синтеза въ простую задачу; всегда видно или же всегда можно отмѣтить, какой строкой условія мы уже воспользовались и какой еще не пользовались, какой выводъ получится изъ тѣхъ строкъ, которыя мы приняли во вниманіе.

При составленіи условія необходимо заботиться о томъ, чтобы дѣти участвовали въ составленіи, подбирали числовыя данныя и догадывались о вопросѣ задачи. Конечно, догадка только тогда полезна, когда въ ней есть основаніе. Часть задачи можно иногда пропускать; пусть дѣти догадываются, чего не достаетъ для рѣшенія вопроса: это содѣйствуетъ аналитическому разбору задачъ.

92. Предварительный синтетическій разборъ, образцы котораго даны выше, имѣетъ цѣлью: a) вообще пріучить дѣтей къ синтезу, безъ котораго немыслимо умѣнье рѣшать задачи; b) путемъ сочетанія условій данной задачи помочь уясненію ея.

Производить до рѣшенія задачи ея анализъ — полезно. Но эта работа оказывается часто трудной для дѣтей, особенно если учитель требуетъ полнаго анализа. Хорошъ сокращенный анализъ, когда сложная задача разлагается на двѣ менѣе сложныхъ, знакомыхъ задачи. Хороши аналитическіе вопросы, т.-е. такіе, кото-

рые вытекаютъ изъ вопроса задачи. Напр., пусть въ задачѣ отыскивается прибыль. Учитель обращается по этому случаю съ вопросомъ „почему здѣсь получится прибыль?“ Если бы въ вопросѣ задачи содержалось про то, что одинъ человѣкъ догоняетъ другого, то можно спросить, что̀ требуется для того, чтобы одинъ догналъ другого.

Лучшее мѣсто для предварительнаго плана и для анализа — это во время обдумыванія учениками условія, обдумыванія молчаливаго и самостоятельнаго. Въ это время мысль перебѣгаетъ отъ одного сочетанія данныхъ къ другому, строитъ рядъ плановъ, иногда не доводя ихъ до конца, потому что доходитъ до синтезовъ лишнихъ, т.-е. такихъ, которымъ нѣтъ продолженія; дѣлаетъ, наконецъ, рядъ разложеній вопроса — вся эта работа мысли въ высокой степени полезна. Но чтобы дѣти во время обдумыванія задачи, дѣйствительно, работали надъ ея планомъ и надъ ея разложеніемъ, надо сообщить имъ умѣнье дѣлать то и другое. А для этого можно на задачахъ, уже рѣшенныхъ, повторять полный планъ ихъ рѣшенія или производить ихъ аналитическій разборъ.

93. Самостоятельность рѣшенія. Мы особенно настаиваемъ на томъ, чтобы рѣшеніе задачъ являлось не простымъ запоминаніемъ пріемовъ, но самостоятельнымъ обдумываніемъ въ синтетическомъ и аналитическомъ направленіи. Съ этой цѣлью мы и предоставляемъ личной работѣ учениковъ, безъ помощи учителя, послѣдовательное составленіе и рѣшеніе тѣхъ простыхъ задачъ, на которыя распадается сложная. Въ нашихъ примѣрахъ (§§ 88, 89, 90) дѣти рѣшали по одному дѣйствію: какъ только дѣйствіе произведено, простая задача провѣряется. Но въ болѣе легкихъ задачахъ можно позволить дѣтямъ рѣшить всю задачу сполна. Если же путемъ анализа сложная задача была расчленена на нѣсколько частей, то и рѣшеніе можно вести по этимъ частямъ.

Иногда бываетъ, что лучшіе ученики, вмѣсто того, чтобы рѣшить одно дѣйствіе, забѣгаютъ впередъ и рѣшаютъ нѣсколько дѣйствій. Препятствовать имъ въ этомъ не надо. Чѣмъ живѣе идетъ работа, тѣмъ лучше. Но они обязаны участвовать въ классной повѣркѣ послѣдовательныхъ простыхъ задачъ. Иначе можетъ случиться такъ, что, увлекшись своимъ способомъ, они ошибутся и учителю придется разъяснять имъ ошибки отдѣльно.

Какъ поступать въ тѣхъ случаяхъ, когда, при самостоятельномъ рѣшеніи, ученики пойдутъ различными путями, одинъ начнетъ рѣ-

шать однимъ способомъ, а другой другимъ? Какъ провѣрять и согласовывать различныя рѣшенія? — Если разница только въ порядкѣ строкъ, т.-е. если одинъ ученикъ начинаетъ съ одного дѣйствія, а другой съ другого, но оба дѣйствія необходимы для рѣшенія задачи, то поступить такъ: пусть каждый объяснитъ свою строку, а потомъ впишетъ себѣ то дѣйствіе, котораго у него нѣтъ и которое только что объяснилъ его товарищъ.

Но бываетъ, что ученики идутъ совершенно различными путями. Тогда всѣхъ ихъ надо привести къ одному пути, наиболѣе удобному, а потомъ, когда уже вся задача рѣшена, вспомнить и про оставленный путь и вкратцѣ выяснить его ходъ. Различные способы, которыми рѣшается задача, полезно сравнить, выясняя, въ чемъ между ними разница, который способъ удобнѣе и чѣмъ именно.

94. Неудачныя попытки синтеза. Занявшись задачей, дѣти иногда выбираютъ такое дѣйствіе, которое для этой задачи найдетъ: строку приходится признать невѣрной, а иногда и нелѣпой. Но эти невѣрныя строки приносятъ не меньше пользы, чѣмъ вѣрныя. Изъ ихъ разбора выясняется, въ какую сторону уклонился ученикъ и въ какомъ отношеніи его надо поправить. Невѣрныя строки, слѣд., должны заслуживать большого вниманія учителя. Мало ихъ отвергнуть; надо непремѣнно разъяснить, въ чемъ ошибка. Нельзя смущаться тѣмъ, что время ушло на поправку ошибокъ и поэтому задачъ рѣшено не много. Дѣло не въ числѣ задачъ, а въ количествѣ производительной умственной работы. Случается, что, производя синтезъ, дѣти натолкнутся на синтезъ лишній: они напишутъ строку, соотвѣтствующую условіямъ задачи, но безполезную для ея рѣшенія. Эту безполезность надо, если можно, выяснить, напр. тѣмъ, что спросить, что̀ они предполагаютъ сдѣлать дальше послѣ этой строки. Когда пригодность строки отвергнута, дѣтямъ дается время подумать, не найдутъ ли они другого сочетанія данныхъ, которое болѣе шло бы къ дѣлу. Если не находятъ, то надо указать имъ на тѣ строки условія, которыя допускаютъ соединеніе въ простую задачу, а ужъ дѣло учениковъ подыскать къ даннымъ задачи соотвѣтствующій вопросъ. Бываетъ, наконецъ, что, вычисливши строку устно, дѣти забываютъ ее записать и пропускаютъ такимъ образомъ дѣйствіе. Не считая это большой ошибкой, учитель все-таки напоминаетъ, что число, надъ которымъ они теперь производятъ дѣйствіе, въ задачѣ не дано, что они его какъ-то получили, и пусть напишутъ то дѣйствіе, которымъ получили.

95. Взаимная помощь учащихся. Во II вып. методики (§ 50), въ статьѣ о самостоятельныхъ работахъ указано было, что дѣти могутъ работать сообща, что эта взаимная помощь не только не вредна, но, наоборотъ, даетъ хорошіе результаты. Подобную взаимную помощь можно примѣнить и во время рѣшенія сложныхъ задачъ. Дѣти раздѣляются на маленькія группы, человѣка по 2 — 3. Такая группа должна состоять изъ учениковъ, которые, приблизительно, равны по своимъ способностямъ и знаніямъ. Такая группа работаетъ вмѣстѣ, съ общаго совѣта пишетъ строки и одновременно въ полномъ составѣ заявляетъ, что дѣйствіе у нихъ произведено. Пока одинъ изъ учениковъ не написалъ, остальные члены группы должны его дожидаться, помогать ему въ это время и объяснять.

Взаимная помощь учениковъ другъ другу можетъ простираться въ этомъ случаѣ еще далѣе. Когда группа рѣшила задачу или одну строку, смотря по тому, что̀ требовалось, она идетъ объяснять другимъ товарищамъ, которые еще не рѣшили. Объяснять должны подольше, пока тѣ не поймутъ. Учитель, путемъ вопросовъ, провѣряетъ, хорошо ли они объяснили своимъ товарищамъ. Если тѣ не поняли, то велитъ объяснять подольше и подробнѣе.

96. Окончаніе задачи. Если отвѣтъ найденъ, то этимъ работа съ задачей еще не окончилась. Требуется дополнить или повторить ея рѣшеніе. Къ этому ведутъ слѣдующіе пріемы: *a)* Полный аналитическій разборъ задачи. *b)* Планъ рѣшенія, или перечисленіе тѣхъ простыхъ задачъ, изъ которыхъ составилась сложная. *c)* Повтореніе тѣхъ простыхъ задачъ, которыя особенно затруднили дѣтей при рѣшеніи сложной. Эти простыя задачи полезно продѣлать на другихъ числахъ, притомъ на болѣе легкихъ, чтобы производствомъ труднаго вычисленія не отвлечь вниманія учащихся отъ хода рѣшенія задачи. *d)* Разработка другихъ способовъ рѣшенія, кромѣ тѣхъ, которыми дѣти пользовались. При этомъ новые способы надо вводить осторожно, постепенно, только тогда, когда прежніе способы усвоены; иначе можно подавить учащихся обиліемъ новыхъ пріемовъ, и эти пріемы перепутаются въ ихъ сознаніи. Но если старые способы усвоены, то, наоборотъ, надо всѣми мѣрами стремиться къ тому, чтобы изыскивались и примѣнялись новые пути. Если задача рѣшена нѣсколькими способами, то полезно ихъ сравнить. *e)* Примѣры учениковъ, т.-е. задачи, которыя придумываютъ ученики по образцу рѣшенной. Эти примѣры важны тѣмъ, что заставляютъ дѣтей вникать въ сущность задачъ и въ ихъ особен-

ности. *f)* Сравненіе нѣсколькихъ задачъ, рѣшенныхъ въ послѣднее время, если между этими задачами существуетъ значительное сходство, такъ что онѣ принадлежатъ къ одному типу. *g)* Продолженіе задачи. Это значитъ слѣдующее. Когда задача пришла къ концу и отвѣтъ на нее найденъ, учитель можетъ спросить: „рѣшена ли задача?“—„откуда видно, что она рѣшена?“ Затѣмъ предлагаетъ распространить задачу, т.-е. подыскать новый вопросъ, для котораго требуется еще нѣсколько дополнительныхъ дѣйствій и нѣсколько новыхъ данныхъ. Это продолженіе задачи служитъ хорошимъ упражненіемъ въ синтезѣ. *h)* Повѣрка задачи. Для повѣрки особенно пригодны вопросы сложные, на которые дается нѣсколько отвѣтовъ. Повѣрка начинается съ этихъ отвѣтовъ и приводитъ къ даннымъ числамъ. Напр., для повѣрки удобна такая задача: „Раздѣлить 25 коп. на двоихъ такъ, чтобы одинъ получилъ 5 копейками болѣе другого“. Отвѣты 15 и 10 складываемъ, получаемъ данное число 25. *i)* Перечисленіе ошибокъ, сдѣланныхъ дѣтьми во время рѣшенія задачи, съ указаніемъ ихъ исправленія. *к)* Если данная задача является довольно новой и интересной, то не лишнее продѣлать еще подобную задачу, съ небольшими измѣненіями въ содержаніи; такое упражненіе еще лучше уяснитъ и укрѣпитъ ходъ рѣшенія.

Мы указали нѣсколько видовъ работы, которой должно заканчиваться рѣшеніе задачи. Не всѣ эти виды, разумѣется, можно присоединить къ рѣшенію одной и той же задачи. Это было бы утомительно, такъ какъ слишкомъ долго пришлось бы остановиться на одномъ и томъ же вопросѣ. Достаточно воспользоваться при каждой задачѣ 1—2 подобными дополненіями, разнообразя ихъ при различныхъ задачахъ и выбирая въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ наиболѣе нужныя, удобныя и полезныя.

97. Особенности рѣшенія устныхъ задачъ. Устно рѣшить письменную задачу не легко, а иногда даже прямо не по силамъ. Затрудняетъ письменная задача прежде всего вычисленіями, но можетъ затруднить количествомъ дѣйствій, если ихъ много. Напр., задачу въ 10 дѣйствій иногда трудно рѣшить потому, что можно спутаться въ длинномъ рядѣ дѣйствій. Отсюда вытекаетъ: для устнаго рѣшенія слѣдуетъ брать задачи менѣе сложныя, съ доступными вычисленіями. Если дѣти затрудняются устной задачей, то a) если трудны числа, то замѣнить ихъ болѣе легкими или ввести записываніе, b) если затрудняетъ ходъ, то учитель долженъ вкратцѣ по-

яснить, дать намекъ, напр. свести дѣло къ наглядности или къ менѣе сложнымъ задачамъ, c) если задача требуетъ болѣе обстоятельнаго разбора, то лучше всего повести его такъ, какъ указано для письменныхъ задачъ въ §§ 88—90, проще говоря, считать устную задачу письменной.

Типическія задачи.

98. Цѣль распредѣленія задачъ по типамъ. Въ разобранныхъ нами задачахъ синтезъ представлялся обильнымъ: данныя числа можно было соединять въ простыя задачи, при чемъ получались даже лишнія простыя задачи. Но бываютъ случаи, когда синтезъ скрытъ, такъ что совершенно не видно, какое данное съ какимъ соединяется въ простую задачу. Тогда мы имѣемъ дѣло съ задачей трудной. Трудныя задачи, для облегченія ихъ рѣшенія, возможно располагать по сортамъ или типамъ.

Главная цѣль выдѣленія типовъ — расположить вопросы въ послѣдовательности, начиная съ легкихъ и переходя къ труднымъ. Это сторона неоспоримо важная. Она имѣетъ еще ту цѣну, что ею нельзя злоупотребить: при всякомъ примѣненіи она приноситъ всегда пользу и никогда вредъ.

Вторая цѣль состоитъ въ слѣдующемъ. На типическихъ задачахъ мы уясняемъ способъ рѣшенія или же знакомимъ дѣтей съ особенной, неизвѣстной для нихъ связью между числами. Въ томъ и другомъ случаѣ требуется, чтобы примѣровъ было нѣсколько, а не одинъ. Поэтому и задачи должны располагаться группами, а не по одной. Но при такой группировкѣ нужна большая осторожность со стороны учителя, чтобы истинное, сознательное рѣшеніе не перешло въ простое запоминаніе, чтобы работа собственной мысли учащихся не замѣнилась простымъ усвоеніемъ того, что даетъ чужая мысль, т.-е. мысль учителя. Чтобы избѣжать этой опасности, мы рекомендуемъ слѣдующія средства. I. Не давать впередъ опредѣленнаго правила, какъ рѣшать извѣстный сортъ задачъ. Правило должно быть сообщено послѣ, когда типъ пройденъ; оно явится, въ такомъ случаѣ, обобщеніемъ всего сказаннаго объ извѣстномъ типѣ.

II. Не давать подрядъ массу задачъ одного рода, чтобы не пріучать къ механическому рѣшенію: примѣровъ надо взять ровно столько, чтобы дѣти могли хорошо понять способъ рѣшенія или сущность задачи.

III. Не дробить задачъ на мелкіе типы. Чтобы отнести задачу

къ той или другой группѣ,— на это тоже нужна работа мысли. И эту-то работу учитель вполнѣ беретъ на себя, когда указываетъ даже мельчайшія подраздѣленія. Лучше предоставить это ученику: пусть онъ догадается, относится ли задача къ данному типу, и если да, то въ чемъ ея сходство съ типомъ.

IV. Чередовать рѣшеніе типическихъ задачъ съ рѣшеніемъ задачъ смѣшанныхъ, чтобы опять-таки не вселить въ дѣтяхъ увѣренности, что достаточно только знать образецъ, а ужъ по нему рѣшать вопросы легко, подъ рядъ, не вдумываясь.

V. Сознательному пониманію типовъ, въ противоположность заучиванію, помогаетъ сравненіе типовъ между собой, а также рѣшеніе типическихъ задачъ нѣсколькими способами.

Разберемъ теперь нѣсколько наиболѣе трудныхъ типовъ.

99. Приведеніе къ общей мѣрѣ. Про способъ приведенія къ единицѣ было упомянуто во II вып. § 48. Продоженіемъ его служитъ приведеніе къ общей мѣрѣ. Здѣсь является уже не простая единица, а сложная, именно общій дѣлитель данныхъ чиселъ. Пусть дана задача такая: „666 грушъ стоятъ 18 рублей. Ск. стоятъ 444 груши?“ Этотъ вопросъ можно бы рѣшить приведеніемъ къ единицѣ, но отъ дѣленія 18 рублей на 666 получается трудная дробь; поэтому мы узнаемъ, сколько стоитъ не 1 груша, а 222, т.-е. третья часть всего количества (666). Такъ какъ 222 груши стоятъ 6 рублей, то 444, т.-е. дважды по 222, стоятъ дважды $5 = 10$ рублей. Мы узнали про 222 потому, что это число является общимъ дѣлителемъ обоихъ данныхъ чиселъ, 666 и 444; иначе сказать, 222 для перваго даннаго числа служитъ третью, а для второго половиной.

Чтобы способъ приведенія къ общей мѣрѣ былъ понятенъ дѣтямъ, надо предварительно разъяснить имъ тотъ синтезъ, который нуженъ для этого способа. Надо, чтобы въ условіи, напр. такомъ: „въ 30 дней поденщикъ заработалъ 24 рубля“, дѣти могли ставить слѣдующіе вопросы: „сколько онъ заработалъ бы въ 15, 10, 6, 5, 3, 2, дня“ и рѣшать ихъ дѣленіемъ 30 руб. на 2, 3, 5, 6, 10, 15, а также ставить такіе вопросы: „сколько онъ заработалъ бы въ 60, 90, 120, 150 и т. д. дней?“ и рѣшать ихъ умноженіемъ на 2, 3, 4, 5 и т. д.

100. Сложеніе кратныхъ частей. Этотъ способъ можно выяснить на такой задачѣ: „Пудъ муки стоитъ 1 р. 80 к. Сколько надо заплатить за 25 фунт.?“ Можно бы рѣшить этотъ вопросъ приведеніемъ къ единицѣ, можно бы приведеніемъ къ общей мѣрѣ, т.-е. къ общему дѣлителю 5; тогда пришлось бы стоимость 5 фун-

товъ, т.-е. $22^1/_2$ коп., брать 5 разъ. Но мы обойдемся безъ умноженія и ограничимся только сложеніемъ, если приведемъ не къ одной общей мѣрѣ, а къ двумъ. Именно, мы узнаемъ сперва, сколько стоятъ 20 ф.: [1 р. 80 к.: 2 = 90 к.] Потомъ узнаемъ, сколько стоятъ 5 фун.; для этого достаточно 90 к. раздѣлить на 4, такъ какъ 5 фунт. составляютъ четвертую часть полупуда. Остается сложить стоимость 20 фунт. и 5 фунт., т.-е. 90 к. и $22^1/_2$ к., получится 1 р. $12^1/_2$ к. Точно также, чтобы узнать стоимость 12 вершковъ сукна, аршинъ котораго стоитъ 3 р., можно обойтись безъ стоимости вершка. Можно привести вопросъ къ стоимости 4 вершковъ, иначе сказать $^1/_4$ аршина, получимъ 25 коп., а отъ 4 вершковъ легко перейти къ 12 вершкамъ, въ которыхъ 4 вершка заключаются 3 раза. Это будетъ способъ приведенія къ общей мѣрѣ. Кратными же частями вопросъ рѣшается такъ. Если аршинъ стоитъ 3 руб., то 8 вершковъ — 1 р. 50 к., такъ какъ 3 р.: 2 = 1 р. 50 к. Если 8 вершковъ стоятъ 1 руб. 50 коп., то за 4 вершка надо заплатить 75 коп., такъ какъ 1 руб. 50 коп.: 2 = 75 коп. Теперь складываемъ стоимость $^1/_2$ арш. съ цѣною $^1/_4$ арш., получаемъ стоимость 12 вершковъ. Это способъ сложенія кратныхъ частей. Кратными частями здѣсь служили $^1/_2$ арш. и $^1/_4$ арш., отъ сложенія которыхъ получается данное намъ количество 12 вершковъ.

101. Умноженіе и дѣленіе суммы вмѣсто слагаемыхъ. Примѣръ умноженія такой: „Куплено 15 досокъ по 22 коп. и столько же досокъ по 28 коп. Сколько заплачено за всѣ доски?" Если эту задачу рѣшать прямо, то придется 22 умножить на 15 и 28 умножить на 15 и оба произведенія сложить. Но короче было бы поступить такъ. 1 доска перваго сорта вмѣстѣ съ одной доской второго сорта стоитъ 50 к. (28 + 22 = 50), а такъ какъ такихъ паръ досокъ имѣется 15, то надо 50 взять 15 разъ, получимъ 7 р. 50 к. Второй способъ, какъ видимъ, легче, потому что вмѣсто 2 умноженій у насъ только одно, и вмѣсто сложенія большихъ чиселъ сложеніе небольшихъ.

Примѣръ дѣленія суммы, вмѣсто дѣленія слагаемыхъ, пусть будетъ такой: „Купили 6 листовъ бумаги, по 13 к. десть, и 6 листовъ по 11 коп. десть. Сколько заплатили за всю бумагу?" Такъ какъ 6 листовъ составляютъ $^1/_4$ дести, то для рѣшенія этого вопроса можно бы взять $^1/_4$ отъ 13 коп. и $^1/_4$ отъ 11 коп. и полученныя числа сложить. Но гораздо легче вычислять такъ: десть лучшаго сорта вмѣстѣ съ дестью второго сорта обошлась бы въ 24 к. А такъ какъ у насъ взято каждаго сорта не по дести, а только по $^1/_4$ дести,

то и заплачено за купленное не 24 к., а 24 : 4 = 6 к. По этому способу мы дѣлили на 4 не каждое слагаемое, 11 и 13, съ тѣмъ, чтобы сложить оба отвѣта, а дѣлили сумму обоихъ чиселъ.

102. Рѣшеніе задачъ при помощи условной единицы. Относительно этихъ задачъ мы говорили выше и причислили ихъ къ задачамъ алгебраическаго характера, такъ какъ въ рѣшеніе ихъ вводится „часть“, или „условная единица“, т.-е. общее количество, которому въ каждомъ частномъ случаѣ придается опредѣленное значеніе. Эти задачи мы считаемъ очень важными по слѣдующей причинѣ. Въ нихъ понятіе объ единицѣ достигаетъ своего высшаго, возможнаго въ ариѳметикѣ, развитія. Въ самомъ началѣ ученія дѣти считали наглядные предметы; постепенно они перешли къ отвлеченной единицѣ. Далѣе явились единицы сложныя, которыя состоятъ изъ опредѣленнаго числа простыхъ. Потомъ счетъ сталъ чередоваться съ измѣреніемъ, которое представляетъ собою болѣе сложный процессъ, сравнительно съ простымъ счетомъ: въ немъ требуется сперва выдѣлить единицы, а потомъ уже ихъ пересчитать. Теперь, наконецъ, понятіе о единицѣ еще распространяется: вмѣсто сложной опредѣленной единицы берется сложная неопредѣленная; при томъ эта единица въ задачѣ не намѣчена и ее требуется выдѣлить. Благодаря подобному теоретическому значенію этого способа, мы за него и стоимъ. Теорія ариѳметики важна не менѣе ея практическихъ приложеній. Но она въ начальной школѣ не должна быть сухой, отвлеченной, выражающейся научнымъ языкомъ. Она должна вырабатываться постепенно и незамѣтно, на рядѣ подобранныхъ упражненій, слѣд., между прочимъ и на задачахъ.

При помощи условной единицы мы рѣшимъ 2 типа задачъ: a) по суммѣ и отношенію найти числа, b) по разности и отношенію найти числа. Примѣромъ перваго типа можетъ служить такая задача: „Раздѣлить 150 на такія 2 части, чтобы одна была вдвое болѣе другой“. Эту задачу надо считать обратной, такъ какъ въ нее, кромѣ сложенія, входитъ еще дѣйствіе дѣленіе. Но, по общему правилу, чтобы выяснить обратную задачу, лучше всего начать дѣло съ прямой. Въ нашемъ случаѣ прямая задача должна включать въ себѣ сложеніе вмѣстѣ съ умноженіемъ, такъ какъ дѣленіе обратно умноженію.

Задача будетъ, напр., такая: „Найти сумму двухъ чиселъ, изъ которыхъ первое равно 6 700, а второе въ 19 разъ болѣе перваго“. Дѣти рѣшатъ ее, конечно, обыкновеннымъ способомъ: 6 700 $\times$ 19 = 127300,

127 300 + 6 700 = 134 000. Но ихъ надо навести на другой способъ. Если второе число въ 19 разъ болѣе перваго, то это значитъ, что оно содержитъ въ себѣ 19 первыхъ чиселъ. Поэтому, первое дѣйствіе въ задачѣ будетъ 19 + 1 = 20, а второе 6 700 × 20 = 134 000. На нѣсколькихъ подобныхъ примѣрахъ дѣти поймутъ, какъ считать при помощи условныхъ единицъ, или частей: въ первомъ числѣ, положимъ, 1 часть, тогда во второмъ числѣ такихъ частей будетъ 19, а въ суммѣ 20.

На прямыхъ задачахъ сущность способовъ объясняется легче, такъ какъ сами задачи легче. И уже за прямыми задачами должны слѣдовать обратныя. Первая такая: „Раздѣлить 150 к. на двоихъ такъ, чтобы одному досталось вдвое болѣе другого“. Второму отдѣлимъ одну условную единицу, а первому двѣ, такъ какъ ему требуется дать вдвое болѣе; всего будетъ 3 условныхъ единицы, или „части“; каждая часть равна 50 простымъ единицамъ, слѣд. 2-му достанется 50 коп., а первому 1 руб.

Точно такъ же рѣшается и задача 2-го типа: „Пушка во 100 разъ тяжеле ядра. Въ то же время она тяжеле его на 4 950 пуд. Сколько вѣситъ ядро?“ Вѣсъ ядра примемъ за одну „часть“. Вѣсъ пушки равенъ 100 такимъ „частямъ“. Слѣд., пушка содержитъ лишнихъ такихъ „частей“ 99. Въ то же время этотъ излишекъ составляетъ 4 950 пуд. Отсюда и опредѣляется вѣсъ ядра: 4 950 п. : 99 = 50 п.

Приложеніе: направленія въ обученіи ариѳметикѣ.

103. Древній міръ, а въ особенности средніе вѣка, видѣли въ преподаваніи ариѳметики, главнымъ образомъ, практическую цѣну и требовали отъ нея практической пользы. Сообразно съ этимъ, преподаваніе замѣтно отличалось отъ нынѣшняго, притомъ въ неблагопріятную сторону. Заучивались опредѣленія и правила, большею частью въ отвлеченной формѣ, безъ достаточнаго пониманія ихъ вывода. Главная забота была устремлена на усвоеніе механизма вычисленія. Наука, пожалуй, принималась во вниманіе, но ученикъ нѣтъ. Учебный матеріалъ не приводился въ соотвѣтствіе съ силами дѣтей и ихъ развитіемъ. Подобное, педагогически несостоятельное, направленіе царило въ школахъ до конца XVIII вѣка.

Переворотъ въ преподаваніи начальной ариѳметики начался со временъ Песталоцци (швейцарскій педагогъ, род. въ 1746 г., умеръ въ 1825 г.). Песталоцци выставилъ 2 требованія: a) отвлеченное изученіе словъ и правилъ надо замѣнить наглядными выводами; b) учебный матеріалъ и способъ преподаванія должны соотвѣтствовать дѣтской природѣ, развитію дѣтей

Согласно съ этими требованіями, обученіе ариѳм. въ школѣ Песталоцци обильно сопровождалось наглядностью. Цифровой (письменный) счетъ отступилъ на второй планъ. Его мѣсто заняли устныя вычисленія. Борясь противъ преобладанія практической цѣли обученія, Песталоцци впалъ въ односторонность. Практическая цѣль преподаванія признана была маловажной; предпочтеніе было отдано цѣли образовательной, т.-е. развитію умственныхъ силъ.

104. Грубе. Изъ послѣдователей Песталоцци наибольшимъ значеніемъ пользовался Грубе (1816—1884). Онъ обратилъ особое вниманіе на тѣ мысли Песталоцци, которыя касаются наглядности. По мнѣнію Грубе, наглядностью можно достигнуть того, что дѣти будутъ представлять себѣ числа, подобно тому, какъ они представляютъ себѣ дерево, столъ, человѣка и т. д. Для выработки такихъ представленій необходимо, чтобы мы распредѣляли ариѳметическій матеріалъ не по дѣйствіямъ, занимаясь сперва примѣрами на сложеніе, потомъ на вычитаніе и т. д., а по числамъ. При такомъ распредѣленіи всѣ дѣйствія производятся вмѣстѣ, въ предѣлѣ извѣстнаго числа, и ученикамъ уясняется, изъ какихъ слагаемыхъ и изъ какихъ множителей состоитъ данное число, а также какія числа можно изъ него вычесть, на какія раздѣлить и сколько получится. Такой методъноситъ названіе „метода изученія чиселъ".

Въ оправданіе его Грубе говоритъ: „Дитя изучаетъ предметъ не тогда, когда разсматриваетъ лишь одинъ признакъ у разныхъ предметовъ, но тогда, когда разсматриваетъ одинъ предметъ по различнымъ его признакамъ. Такъ и съ числомъ ученикъ не ознакомится, при расчлененіи ариѳметики по дѣйствіямъ, если сегодня изучаетъ $3 + 3 = 6$, а черезъ нѣсколько недѣль, когда очередь дошла до вычитанія, $6—3 = 3$. Гораздо лучше, если я знаю, что $3 \times 2 = 6$ вмѣстѣ съ $3 + 3 = 6$, $6—3 = 3$, $6 : 2 = 3$, и методика не права, разрывая по дѣйствіямъ эту объективную связь. Такое раздѣленіе не увеличиваетъ, но ослабляетъ наглядность, такъ какъ препятствуетъ наблюдательности въ созерцаніи и сосредоточенію вниманія на одномъ пунктѣ".

Коренная ошибка Грубе состоитъ въ томъ, что числа представлять себѣ мы не можемъ. Яблоко мы себѣ представимъ, а число 96 нѣтъ. Поэтому, при взглядѣ на яблоко, мы его узнаемъ, а увидавъ группу въ 96 человѣкъ, мы не можемъ сразу рѣшить, дѣйствительно ли тутъ 96 человѣкъ. Мы должны непремѣнно сосчитать группу. Счетъ является тѣмъ средствомъ, при помощи котораго мы узнаемъ число.

105. Евтушевскій. Онъ былъ проводникомъ взглядовъ Грубе въ русскую педагогическую литературу. Методика Евтушевскаго въ теченіе нѣсколькихъ десятилѣтій пользовалась громадной распространенностью. Основной недостатокъ ея уже указанъ. Онъ тотъ, что у Грубе, хотя въ смягченной формѣ.

Перечислимъ теперь практическія неудобства: a) занятія ариѳметикой по методу „Изученія чиселъ" однообразны и скучны. Первые два года должно изучать число за числомъ по одному шаблону въ одномъ неизмѣнномъ порядкѣ. Начало занятій еще можетъ интересовать дѣтей, но конецъ не даетъ ничего освѣжающаго. b) Изученіе отдѣльныхъ чиселъ тянется слишкомъ долго, поглощаетъ время и силы. Между тѣмъ выдѣленіе дѣйствій и способовъ ихъ производства откладывается. Такимъ образомъ получается медли-

тельность, растянутость въ началѣ курса и слишкомъ быстрый и трудный ходъ въ концѣ. с) При изученіи чиселъ происходитъ смѣшеніе дѣйствій. Отъ этого получается много неудобствъ. Именно, не соблюдается переходъ отъ легкаго къ трудному, такъ какъ на первыхъ же урокахъ, кромѣ легкихъ дѣйствій (сложенія и вычитанія), вводятся и трудныя (умноженіе и дѣленіе). Сверхъ того, опредѣленныхъ способовъ для производства дѣйствій въ первые 2 года не указывается. Дѣти находятъ отвѣты наглядно и запоминаютъ ихъ. Но такъ какъ цѣлую массу отвѣтовъ запомнить невозможно, то рекомендуется ученикамъ изыскивать свои способы вычисленія. А это не всегда и не для всѣхъ посильно.—Слѣдуетъ признать, что методика Евтушевскаго отличается ясностью и послѣдовательностью изложенія. Она даетъ не мало цѣнныхъ для учителя указаній. Вообще, она очень удобна для учителя; на ученикахъ же она отзывается тяжело, такъ какъ преподаваніе по ней скучно, растянуто и не даетъ правильнаго понятія объ ариѳметикѣ, какъ наукѣ счета и 4 дѣйствій.

Задачникъ Евтушевскаго примѣненъ къ его методикѣ. Если имъ пользоваться, какъ дополнительнымъ пособіемъ, то онъ пригоденъ для повторительныхъ упражненій и для самостоятельныхъ работъ.

106. Методъ изученія дѣйствій. По нему составлена наша методика. Представителемъ этого метода, доказавшимъ его основательность и противопоставившимъ его методу „изученія чиселъ“, слѣдуетъ признать въ русской литературѣ Гольденберга, хотя въ разработкѣ этого метода принимали участіе и другіе педагоги.

Въ настоящее время всѣ вновь выходящіе методики и задачники составляются примѣнительно къ этому методу. Основываясь на счетѣ и дѣйствіяхъ, онъ учитъ тому, что составляетъ истинное содержаніе ариѳметическихъ знаній.

107. Методическая литература. Кромѣ трудовъ Евтушевскаго и Гольденберга, мы обратили бы вниманіе учителя на слѣдующія методическія пособія:

1. Аржениковъ. Методика начальной ариѳметики (1 р. 25 к.) Въ ней содержится много хорошо разработанныхъ примѣрныхъ уроковъ. Она пригодна, въ особенности, для начинающихъ преподавателей. Есть задачникъ того же автора, соотвѣтствующей методикѣ (3 вып. по 15 коп.).

2. Бобровниковъ. Методика начальнаго преподаванія ариѳметики и сборникъ упражненій въ умственномъ счетѣ (50 коп.). Содержитъ оригинальный подборъ примѣровъ для умственнаго счета, при которомъ возможно занятіе одновременно съ нѣсколькими отдѣленіями.

3. Егоровъ. Ѳ. И. Методика ариѳметики и задачникъ. Приноровлены къ потребностямъ городскихъ училищъ.

4. Житковъ. Методика ариѳметики (75 коп.). Особенность его задачниковъ та, что упражненія, назначенныя для самостоятельныхъ работъ, помѣщены въ отдѣльномъ сборникѣ.

5. Корытинъ. Обзоръ учебной литературы по ариѳметикѣ и геометріи (1 руб.).

6. Кудрявцевъ. Ариѳметика на счетахъ (45 коп.).

7. Латышевъ. Руководство къ преподаванію ариѳметики (50 коп.). Оно содержитъ много цѣнныхъ общихъ указаній.

8. Лубенецъ. Сборникъ ариѳметическихъ задачъ, заключающихъ въ себѣ данныя, преимущественно, изъ сельскаго быта (40 коп.).

9. Малининъ. (По Церингеру). Задачи для умственныхъ вычисленій (35 коп.).

10. Рачинскій. 1001 задача для умственнаго счета. Эта книжка пригодна для старшаго отдѣленія.

11. Терешкевичъ. Опытъ систематизаціи ариѳм. задачъ по типамъ (30 коп.).

12. Успенскій. Нѣмецкая и русская методика ариѳметики за текущее столѣтіе (40 коп.). (Подъ текущимъ подразум. XIX стол.).

13. Цвѣтковъ. Рѣшеніе ариѳм. задачъ. Въ этой книжкѣ, составляющей приложеніе къ сборнику задачъ (3 вып.), разсматривается чисто аналитическій способъ разбора задачъ.

14. Юревичъ. Сборникъ ариѳм. задачъ для начальныхъ училищъ. Отличіе этого сборника — дешевизна: 1 вып. Цѣна 15 коп.

108. Значеніе методической литературы и опыта. Учителю мало одного методическаго руководства. Онъ никогда не долженъ быть рабомъ его. Никакая методика не можетъ дать указаній совершенно точныхъ, одинаково полезныхъ и примѣнимыхъ. Наука, напр. математика, даетъ выводы въ формѣ законовъ, обязательныхъ для всего человѣчества. Методика же, основываясь на наукѣ, содержитъ въ себѣ, кромѣ того, элементы искусства и требуетъ поэтому отъ преподавателя личнаго творчества, личной работы. Наблюденія надъ дѣтьми, надъ ихъ умственной жизнью даютъ вдумчивому учителю массу указаній въ его педагогической дѣятельности. Ученикъ — лучшая и важнѣйшая методика. Методическая литература, съ своей стороны, дополняетъ указанія опыта и направляетъ опытъ въ желательную сторону. Воздѣйствіе методики будетъ еще плодотворнѣе, если учитель не ограничится однимъ какимъ-нибудь руководствомъ и задачникомъ, а постарается расширить свой кругозоръ знакомствомъ съ нѣсколькими авторами.

„Въ педагогикѣ", по словамъ Ушинскаго, „учить много нечего, а главное состоитъ въ томъ, чтобы направить мысль человѣка на дѣло воспитанія и помочь ему сдѣлать первые шаги въ этой области: если душа человѣка воспріимчива и голова его работаетъ, а опыты у него тутъ же подъ руками, то дѣло пойдетъ само собой".

ДНЕВНИКЪ ЗАНЯТІЙ.

15. сент. 1 ур. Счетъ тысячами. Обозначеніе четырехзначныхъ чиселъ цифрами. Откладываніе ихъ на счетахъ. Задачи изъ III вып. (стр. 3): 1—8.

16. сент. 2 ур. Счетъ десятками тысячъ. Письменное обозначеніе и откладываніе насчетахъ пятизначныхъ чиселъ. Задачи: 8—12.

18. сент. 3 ур. Самост. раб. Письмо таблицы умноженія.

20 сент. 4 ур. Самост. раб. Умноженіе трехзначныхъ чиселъ на однозначныя, въ пред. 1000 (повтореніе). Примѣры изъ II вып.

21 сент. 5 ур. Окончена и повторена нумерація. Задачи: 12—22.

22 сент. 6 ур. Сложеніе многозначныхъ чиселъ: устное, письменное и на счетахъ.

23 сент. 7 ур. Задачи на сложеніе: 22—37.

25 сент. 8 ур. Самост. раб. Повтореніе умноженія и дѣленія въ пред. 1000.

28 сент. 9 ур. Письменное вычитаніе многозначныхъ чиселъ, когда въ обозначеніи уменьшаемаго нѣтъ нулей или есть только одинъ нуль. Задачи: 37—46.

29 сент. 10 ур. Письм. вычитаніе многозн. чиселъ, когда въ обозначеніи уменьшаемаго на мѣстѣ единицъ и десятковъ стоятъ нули. Задачи: 46—59.

30 сент. 11 ур. Письм. вычитаніе многозн. чиселъ, когда въ обозначеніи уменьшаемаго встрѣчается нѣсколько нулей подрядъ. Задачи: 59—71.

2 окт. 12 ур. Самост. раб. Повтореніе умноженія и дѣленія въ пред. 1000.

4 окт. 13 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. ур.

5 окт. 14 ур. Устныя задачи на вычитаніе многозначныхъ чиселъ: 71—76. Вычитаніе на счетахъ. Задачи на счетахъ: 76—82.

6 окт. 15 ур. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное, а также на 10, 100, 1000. Задачи: 82—90.

7 окт. 16 ур. Умноженіе многозн. числа на разрядное число, напр.: 30, 500, 6000 и т. п. Задачи: 90—100.

9 окт. 17 ур. Самост. раб. Сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ милліона.

11 окт. 18 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. ур.

12 окт. 19 ур. Умноженіе многозн. числа на двузначное. Задачи: 100—110.

13 окт. 20 ур. Повтореніе умноженія на разрядное число и на двузначное. Задачи: 110—120.

14 окт. 21 ур. Умноженіе на трехзначное число. Задачи: 120—130.

16 окт. 22 ур. Самост. раб. Умноженіе многозн. числа на однозначное и на разрядное. Примѣры умноженія: 1—13.

18 окт. 23 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. ур.

19 окт. 24 ур. Умноженіе на многозначное число. Задачи: 130—137.

20 окт. 25 ур. Дѣленіе многозн. числа на 10, 100, 1000 и т. д. Задачи: 137—147.

23 окт. 26 ур. Повтореніе дѣленія трехзн. числа на однозн. и двузн., напр.: на 2, 20, 21, 22.

25 окт. 27 ур. Дѣленіе четырехзн. числа на двузн., напр. на 21, 22, Задачи: 147—155.

26 окт. 28 ур. Самост. раб. Умноженіе многозн. числа на двузн. Примѣры умноженія: 13—28.

27 окт. 29 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. урокѣ.

28 окт. 30 ур. Дѣленіе многозн. числа на двузн. и трехзн., напр.: на 21, 210, 215. Зад.: 155—165.

30 окт. 31 ур. Повтореніе дѣленія, напр.: на 5, 50, 51, 52. Зад. 165—172.

1 н. 32 ур. Повтореніе дѣленія, напр.: на 52, 520, 525. Зад.: 172—180.

2 н. 33 ур. Самост. раб. Дѣленіе на однозн. число и на 10. 1—12.

3 н. 34 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. ур.

4 н. 35 ур. Повтореніе дѣленія, напр.: на 515, 516, 521. Зад.: 180—187.

6 н. 36 ур. Дѣленіе на такое двузн. число, въ которомъ количество простыхъ единицъ составляетъ около половины десятка, напр.: на 25, 24, 26. Задачи: 187—194.

8 н. 37 ур. Дѣленіе на такое трехзн. число, въ которомъ количество десятковъ составляетъ около половины сотни, напр.: на 251, 252, 241, 262. Задачи: 194—201.

9 н. 38 ур. Самост. раб. Дѣленіе на двузн. число. Примѣры: 12—24.

10 н. 39 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. ур.

11 н. 40 ур. Дѣленіе на такія числа, въ которыхъ слѣдующій за высшимъ разрядъ составляетъ почти единицу высшаго, напр.: на 19, 191. Зад.: 201—205.

13 н. 41 ур. Продолженіе предыд. ур. Дѣленіе на 28, 282. Зад.: 205—209.

15 н. 42 ур. Вычисленія на счетахъ. Зад.: 209—215.

17 н. 43 ур. Самост. раб. Дѣленіе на двузн. число. Примѣры: съ 24 по 35.

18 н. 44 ур. Задачи на всѣ дѣйствія (смѣшеніе 2 веществъ): 215—223.

20 н. 45 ур. Задачи на всѣ дѣйствія (смѣшеніе нѣсколькихъ веществъ): 223—231.

23 н. 46 ур. Зад. на всѣ дѣйствія (смѣш. при прибыли и убыткѣ): 231—236.

24 н. 47 ур. Самост. раб. Примѣры на всѣ дѣйствія, III вып., стр. 38: 1 по 11. (Задачи на смѣшеніе.)

25 н. 48 ур. Зад. на всѣ дѣйствія (по данному слагаемому и по отношенію 2 слагаемыхъ найти сумму): 236—243.

29 н. 49 ур. Задачи на всѣ дѣйствія (по суммѣ и отношенію слагаемыхъ найти слагаемыя): 243—249.

30 н. 50 ур. Задачи на всѣ дѣйствія (по суммѣ нѣсколькихъ слагаемыхъ и отношенію найти слагаемыя): 249—255.

1 д. 51 ур. Самост. раб. Примѣры на всѣ дѣйствія. Задачи на всѣ дѣйствія. 11—24.

2 д. 52 ур. Образованіе и обозначеніе простѣйшихъ дробей, напр.: $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$. Задачи: 255—265.

4 д. 53 ур. Доли пятыя и десятыя. Обращеніе крупныхъ долей въ мелкія и мелкихъ въ крупныя, напр.: третьихъ въ шестыя, пятыхъ въ десятыя и обратно. Зад.: 265—273.

7 д. 54 ур. 4 дѣйствія надъ половинами, четвертками и восьмушками. Задачи: 273—283.

8 д. 55 ур. Самост. раб. Примѣры на всѣ дѣйствія, и задачи. 24—33.

9 д. 56 ур. Простѣйшія вычисленія съ долями третьими и шестыми, а также пятыми и десятыми.

11 д. 57 ур. Рѣшеніе задачъ приведеніемъ къ общему числу (иначе: къ общему дѣлителю, общей мѣрѣ): 283—293.

13 д. 58 ур. Продолженіе предыд. урока, зад.: 293—303.

14 д. 59 ур. Самост. раб. Примѣры на всѣ дѣйствія съ цѣлыми числами и простѣйшими долями, стр. 40: 33 по 44.

15 д. 60 ур. Самост. раб. То же, что и на предыд. ур.

16 д. 61 ур. Задачи на всѣ дѣйствія съ 330.

18 д. 62 ур. Задачи.

20 д. 63 ур. Задачи.

Составныя именованныя числа.

7 янв. 64 ур. Мѣры длины (повтор.). Раздробленіе и превращеніе сост. имен. чиселъ. Зад.: 370—380.

8 янв. 65 ур. Самост. раб. Примѣры на раздробл. и превращ., стр. 43: 1—13. Зад. стр. 34: 334—340.

10 янв. 66 ур. Мѣры вѣса (повтор.). Сложеніе и вычитаніе сост. именов. чиселъ.

11 янв. 67 ур. Самост. раб. Примѣры на раздр., превращ., сложеніе и вычитаніе составн. именов. чиселъ.

12 янв. 68 ур. Самост. раб. То же, что и на предыд. урокѣ.

13 янв. 69 ур. Мѣры вмѣстимости (повтор.). Умноженіе составн. именов. чиселъ.

15 янв. 70 ур. Задачи на умноженіе сост. именов. чиселъ.

17 янв. 71 ур. Мѣры времени. Дѣленіе составн. именов. чиселъ на части.

18 янв. 72 ур. Самост. раб. Примѣры на умноженіе сост. именов. чиселъ.

19 янв. 73 ур. Самост. раб. То же, что и на предыд. ур.

20 янв. 74 ур. Мѣры бумаги. Задачи на дѣленіе сост. именов. чиселъ на части.

22 янв. 75 ур. Дѣленіе составн. именов. чиселъ по содержанію.

24 янв. 76 ур. Задачи на дѣленіе по содержанію.

25 янв. 77 ур. Самост. раб. Примѣры дѣленія сост. именов. чиселъ на части.

26 янв. 78 ур. Самост. раб. То же, что и на предыд. ур.

27 янв. 79 ур. Задачи на дѣленіе сост. именов. чиселъ.

29 янв. 80 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

31 янв. 81 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

1 ф. 82 ур. Самост. раб. Примѣры дѣленія составн. именов. чиселъ по содержанію.

3 ф. 83 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

5 ф. 84 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

7 ф. 85 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

10 ф. 86 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

12 ф. 87 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

14 ф. 88 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

15 ф. 89 ур. Самост. раб. Примѣры на всѣ дѣйствія.

16 ф. 90 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. урокѣ.

21 ф. 91 ур. Задачи на всѣ дѣйствія.

22 ф. 92 ур. Самост. раб. Задачи на всѣ дѣйствія.

23 ф. 93 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. урокѣ.

24 ф. 94 ур. Понятіе о треугольникѣ, четырехугольникѣ, прямоугольникѣ и квадратѣ. Расчлененіе даннаго прямоугольника на малые прямоугольники.

26 ф. 95 ур. Квадр. вершокъ. Измѣреніе площади прямоугольника. Квадр. аршинъ, кв. футъ, кв. дюймъ. Числовыя (единичныя) отношенія кв. мѣръ.

28 ф. 96 ур. Измѣреніе площади прямоугольника (повтореніе). Кв. сажень. Десятина. Задачи на кв. измѣренія.

29 ф. 97 ур. Практическія упражненія въ измѣреніи площадей.

1 м. 98 ур. Самост. раб. Примѣры на кв. мѣры.

2 м. 99 ур. Площади такихъ прямоугольниковъ, стороны которыхъ выражены различными мѣрами. Задачи.

4 м. 100 ур. Дана площадь прямоугольника и ширина его, вычислить длину. Задачи. Площадь треугольника.

6 м. 101 ур. Задачи на всѣ дѣйствія съ квадратными мѣрами.

7 м. 102 ур. Самост. раб. Примѣры на кв. мѣры.

8 м. 103 ур. Самост. раб. То же, что на предыд. урокѣ.

9 м. 104 ур. Кубъ. Куб. футъ и куб. дюймъ. Понятіе о вмѣстимости, или объемѣ. Измѣреніе объемовъ при помощи куб. дюйма. Правило измѣренія. Число куб. дюймовъ въ куб. футѣ.

11 м. 105 ур. Куб. вершокъ, куб. аршинъ и куб. сажень. Число куб. вершковъ въ куб. аршинѣ и куб. аршинъ въ куб. сажени. Измѣреніе объема ящика, комнаты, печи и т. п.

13 м. 106 ур. Рѣшеніе задачъ на куб. измѣренія.

14 м. 107 ур. Задачи на куб. измѣренія.

15 м. 108 ур. Самост. раб. Задачи на кв. и куб. мѣры.

16 м. 109 ур. Устное рѣшеніе задачъ на вычисленіе времени: вычисленія въ предѣлѣ часа, въ предѣлѣ сутокъ; переходъ изъ однѣхъ сутокъ въ другія; вычисленія въ предѣлѣ мѣсяца, безъ перехода изъ одного мѣсяца въ другой. Число дней въ каждомъ изъ 12 мѣсяцевъ. Годъ простой и високосный. Задачи.

18 м. 110 ур. Устное рѣшеніе задачъ на вычисленіе времени; переходъ изъ одного мѣсяца въ другой; вычисленія въ предѣлѣ года. Зад.

20 м. 111 ур. Самост. раб. Задачи на куб. мѣры.

21 м. 112 ур. Рѣшеніе задачъ на вычисленіе времени (время выражено въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ).

22 м. 113 ур. Вычисленіе девятаго, сорокового и т. п. дня. Вычитаніе именованныхъ чиселъ, выражающихъ время. Задачи.

23 м. 114 ур. Опредѣленіе промежутка времени въ годахъ, мѣсяцахъ и дняхъ. Задачи.

27 м. 115 ур. Самост. раб. Задачи на вычисленіе времени.

28 м. 116 ур. Понятіе о процентѣ. Задачи на %.

29 м. 117 ур. Задачи на %.

30 м. 118 ур. Обозначеніе десятичныхъ долей.

Въ послѣдующіе уроки, начиная съ 1 апрѣля, рѣшены задачи до конца, а также повторено и дополнено пройденное за 3 года.

УЧЕБНЫЯ и ДРУГІЯ КНИГИ, ИЗДАННЫЯ КНИГОПРОДАВЦЕМЪ
М. Д. НАУМОВЫМЪ

въ Москвѣ, Большая Лубянка, д. Страхового Общества „Россія“, въ С.-Петербургѣ, у П. В. Луковникова.

Арефьевъ, А. и **Соколовъ, Аѳ.** Повторительный курсъ ариѳметики для начальныхъ народныхъ училищъ. Изд. 5-е. М. 1898 г. Ц. 10 к. Включено въ программу для церковно-приходскихъ школъ.

Арженниковъ, К. П. Методика начальной ариѳметики. М. 1909 г. Ц. 1 р. 25 к., въ переплетѣ 1 р. 40 к. Изд. 11-е. Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. допущ. въ учительскія библіотеки низшихъ училищъ и въ библіотеки учительскихъ институтовъ и семинарій.

— **Сборникъ ариѳметическихъ задачъ и примѣровъ для начальныхъ народныхъ училищъ.** Годъ 1-й. Счетъ до 100, дѣйствія до 20. Изд. 36-е. М. 1909 г. Ц. 15 к. Годъ 2-й. Первая сотня. Первая тысяча. Изд. 39-е. М. 1910 г. Ц. 15 к. Годъ 3-й. Числа любой величины. Изд. 27-е. 1909 г. Ц. 20 к. Особ. Отд. Учен. Комитета М. Н. Просв. допущены къ употребленію въ начальныхъ училищахъ. Годъ 4-й. Обыкновенныя дроби (повтор. курсъ). Метрич. мѣры. Десятичныя дроби. Измѣреніе линій, площадей, поверхностей и объемовъ. 1907 г. Ц. 20 к.

— Отвѣты къ Сборнику ариѳметическихъ задачъ. Изд. 5-е. М. 1909 г. Ц. 5 к.

— Сборникъ упражненій по геометріи для начальныхъ училищъ. М. 1904 г. Ц. 25 к.

Беллюстинъ, В. Директоръ Поливановской учит. семинаріи. Дневникъ занятій по ариѳметикѣ въ начальной школѣ. Изд. 4-е. М. 1909 г. Ц. 15 коп. Допущены Особ. Отд. Уч. Ком. М. Н. Пр. въ учит. библіотеки низш. учебн. заведеній.

— Методика ариѳметики. Курсъ 1-го, 2-го, 3-го и 4-го года обученія. М. 1908 г. Ц. 20 к. Изд. 4-е. Допущена Уч. К. М. Н. Пр. въ библіот. учит. семинарій и низш. учил. (съ прилож. отвѣтовъ къ сборнику задачъ).

— **Ариѳметическій задачникъ. Составленъ согласно примѣрной программѣ М. Н. Пр. 1-й годъ обученія.** Ц. 12 к., 2-й годъ обученія. Ц. 12 к., 3-й годъ обученія. Ц. 15 к., 4-й годъ обученія. Ц. 12 к. М. 1909 г. Изд. 7-е. Всѣ 4 выпуска допущ. Уч. Ком. М. Н. Пр. къ употребленію въ начальныхъ училищахъ.

Бучинскій, Н. Практическая русская грамматика. Изд. 5-е, испр. и дополненное. М. 1908 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к. Допущена Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. въ качествѣ руковод. для пригот. и 1-хъ классовъ средн. учебн. заведеній и къ классн. употребл. въ городск. и уѣздн. училищахъ.

— Начальная русская грамматика для городскихъ, приходскихъ и сельскихъ народныхъ школъ. М. 1900 г. Ц. 25 к. Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена для классного употребл. въ народн. училищахъ.

Воано. Преподаватель Царскосельской Николаевской гимназіи. Краткая грамматика французскаго языка по Ноэлю и Шапсалю, Плецу и друг. Изд. 3-е, вновь исправленное. 1-е изданіе одобрено Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Просвѣщенія, какъ руководство для мужскихъ и женскихъ гимназій, прогимназій и реальныхъ училищъ. Москва 1909 г. Цѣна 50 к., въ папкѣ 65 к.

Гика, Д. Зависимость между геометрическими теоремами. Математическо-философское сочиненіе. М. 1890 г. Ц. 1 р. Рекоменд. Ученымъ Комит. М. Н. Пр. для фундамент. библіотекъ средн. учебн. завед. мужск. и женскихъ.

— Задачи для начальнаго обученія ариѳметикѣ. Цѣлыя числа. Изд. 2-е, исправленное и дополненное. Одобрено Учен. Комит. М. Н. Пр. и Духовно-Учебн. Комит. при Святѣйшемъ Синодѣ. М. 1885 г. Ц. 45 к., въ перепл. 60 к.

— Перспектива техническаго рисованія. Для реальныхъ училищъ и профессіональныхъ школъ. М. 1897 г. Ц. 35 к. Одобр. Учен. Ком. Мин. Нар. Просв.

— Элементы геометріи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній, съ приложеніемъ коническихъ сѣченій, способовъ рѣшенія задачъ на построеніе и вычисленія объемовъ тѣлъ по теоремѣ Кавальери. Одобр. Учен. Ком. Мин. Нар. Просв., какъ руководство для гимназій и реальныхъ училищъ, и Учебн. Ком. при Свят. Син. Изд. 4-е. М. 1909 г. Ц. 1 р. 35 к., въ переплетѣ 1 р. 50 к.

— Геометрическія задачи на построеніе и методъ ихъ рѣшенія. Одобр. въ качествѣ учебнаго пособія для среднихъ учебныхъ заведеній М. Н. Пр. (отн. отъ 17 августа 1901 г. за № 21647). М. 1908 г. Ц. 75 к. Изд. 2-е.

— Приложеніе алгебры къ геометріи или алгебраическій способъ рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. М. 1908 г. Ц. 40 к. Изд. 2-е.

Гика, Д. и **Муромцевъ, А.** Геометрическія задачи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Часть 1-я. Задачи плоской геометріи (1773 задачи). Изд. 9-е. М. 1909 г. Ц. 85 к., въ переплетѣ 1 р. Одобр. Уч. К. М. Н. Пр.

— Геометрическія задачи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Часть 2-я. Задачи геометріи въ пространствѣ (задачи съ 1774 до 8213). Изд. 7-е. М. 1908 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 к. Одобр. У. К. М. Н. Пр.

Дубовъ, Д., директоръ Рыбинской гимназіи. Сборникъ фразъ и статей для устныхъ и письменн. упражн., въ переводѣ съ русск. яз. на латинскій. Изд. 4-е. М. 1900 г. Ц. 1 р. 10 к., въ перепл. 1 р. 25 к. Одобр. Учен. Ком. М. Н. Пр.

Ефремовъ, В. Краткій курсъ природовѣдѣнія, составленный по программѣ для первыхъ трехъ классовъ гимназіи. Часть 1-я. Воздухъ, вода и земля. Курсъ 1-го класса съ рисунками. Москва, 1910 г. Цѣна 75 к., въ перепл. 90 к. Въ скоромъ времени выйдетъ изъ печати часть 2-я Растенія и часть 3-я Человѣкъ и животныя.

Козьминъ, К., преподаватель Московскаго учительскаго института. Русская хрестоматія для среднихъ классовъ средне-учебныхъ заведеній, городскихъ и уѣздныхъ училищъ. Курсъ II, изд. 17-е. Одобр. Учен. Ком. М. Н. Пр. М. 1909 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 к.

— Грамматика церковно-славянскаго языка новаго періода. Съ приложеніемъ образцовъ для этимологическаго и синтактическаго разбора текста Евангелія. Пособіе для городскихъ, уѣздныхъ и сельскихъ училищъ. Изд. 18-е. М. 1910 г. Ц. 50 к., въ перепл. 65 к. Одобр. Уч. К. М. Н. Пр., какъ руководство.

— Церковно-славянская хрестоматія. Пособіе для сельскихъ и городскихъ училищъ. Книга эта служитъ приложеніемъ къ „Грамматикѣ церковно-славянскаго языка". Изд. 4-е. М. 1903 г. Ц. 40 к., въ переплетѣ 55 к.

— Синтаксисъ русскаго языка для средн. учебн. завед. и городск. учил. съ приложеніемъ задачника. Изд. 13-е. М. 1909 г. Ц. 50 к., въ перепл. 65 к.

— Образцы систематическаго диктанта для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ. Ч. I. Этимологія. Сост. согласно съ руководствомъ „Русское правописаніе" акад. Я. Грота. Изд. 11-е. М. 1908 г. Ц. 75 к., въ переплетѣ 90 коп. 7-е изд. Допущ. Уч. К. М. Н. Пр. къ классному употребленію въ низшихъ училищахъ.

— То же. Ч. II. Синтаксисъ. Изд. 4-е. М. 1908 г. Ц. 80 к., въ перепл. 95 к. 2-е изд. Уч. К. М. Н. Пр. допущено къ классн. употребл. въ низшихъ училищ.

— Логико-стилистическіе разборы образцовъ прозы и поэзіи. Пособіе при практическомъ изученіи стилистики, теоріи прозы и поэзіи и при веденіи объяснительнаго чтенія на высшей его ступени. Для среднихъ классовъ гимназій, реальныхъ училищъ, учительскихъ институтовъ и семинарій и старшихъ классовъ городскихъ училищъ. Изд. 7-е. Одобр. Учен. Ком. Мин. Нар. Пр. М. 1908 г. Ц. 1 р., въ переплетѣ 1 р. 15 к.

— Орѳографическія прописи. Пособіе при изученіи орѳографіи. Тетрадь первая. М. 1885 г. Ц. 35 коп.

— Справочный словарь церковно-славянскаго языка. М. 1889 г. Ц. 5 к.

Козьминъ, К. и **Покровскій, В.** Теорія словесности. Сводъ теоретическихъ положеній, выведенныхъ изъ разбора образцовъ прозы и поэзіи. Изд. 13-е. Одобр. Учен. Комит. М. Н. Пр., М. 1908 г. Ц. 35 к.

— Біографіи и характеристики отечественныхъ образцовыхъ писателей, для городскихъ училищъ и учительскихъ семинарій. Изд. 11-е. Одобр. Учен. Ком. М. Н. Пр. М. 1910 г. Ц. 50 к.

Коневскій, М. Историческія свѣдѣнія о богослужебномъ пѣніи въ ветхозавѣтной, новозавѣтной, вселенской и въ частности русской церквахъ, съ добавленіемъ краткихъ свѣдѣній о преподаваніи церковнаго пѣнія въ начальныхъ школахъ и организаціи пѣвческаго хора. Изд., одобренное Училищнымъ Совѣтомъ при Св. Синодѣ въ учительскія библіотеки церковно-прих. шк. М. 1900 г. Ц. 30 к.

Кругловъ, А. В. „Литература маленькаго народа". Критико-педагогическія бесѣды по вопросамъ дѣтской литературы. 2 выпуска. Допущ. Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. въ фундаментальныя библіотеки средн. учебн. завед., въ библ. учительск. инст. и семинарій и въ безплатныя народныя библіотеки и читальни. М. 1897 г. Цѣна каждаго вып. 85 к., въ папкѣ 1 р.

— За чужимъ горбомъ. Повѣсть для дѣтей, съ рисунками въ текстѣ. Одобрена Ученымъ Комит. Мин. Нар. Просв. для ученическихъ библіотекъ среднихъ и низшихъ учебныхъ заведеній. Изд. 2-е. М. 1896 г. Цѣна въ папкѣ 1 р., въ коленкор. перепл. 1 р. 50 к.

Литвиненко, К. А. Записки по грамматикѣ русскаго языка. Методическое руководство и учебное пособіе для городскихъ, приходскихъ и сельскихъ училищъ. Курсъ 3-го и 4-го года городск. училищъ. М. 1887 г. Ц. 75 к., въ перепл. 90 к.

Любутовъ, Я. Пособіе при изученіи теоріи словесности. М. 1883 г. Ц. 25 к.

Николаевскій, И., директоръ Несвижской учительской семинаріи. Руководство къ изученію главныхъ основаній педагогики въ учительскихъ семинаріяхъ М. Н. Пр. Часть I. Дидактическая пропедевтика, курсъ II класса. Изд. 7-е. Одобр. Уч. К. М. Н. Пр., какъ руководство для учительскихъ семинарій и институтовъ и для учительскихъ библіотекъ нач. уч. М. 1910 г. Ц. 50 к., въ перепл. 65 к.

— Часть II. Педагогическая пропедевтика, курсъ III класса. Изд. 5-е. М. 1909 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к. Одобр. Уч. Ком. М. Н. Пр.

Никитинъ, С. Элементарный курсъ географіи для низшихъ классовъ среднихъ учебн. заведеній и элементарныхъ школъ. Вып. 3-й. Отечествовѣдѣніе. Вып. 4-й. Міровѣдѣніе. 3-е изданіе одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. Изд. 6-е исправл. М. 1905 г. Ц. 50 к., въ переплетѣ 65 к.

Остроумовъ, А., учитель пѣнія въ Поливановской учительской семинаріи. Элементарные уроки пѣнія для учителей начальныхъ училищъ и воспитанниковъ учительскихъ семинарій. М. 1899 г. Ц. 50 к.

Пастуховъ. Пиши правильно. Грамматика-крошка, новый практическій способъ къ изученію правописанія. М. 1909 г. Ц. 10 к.

— „Дружокъ". Годъ I. Азбука для русскаго и церковно-славянскаго чтенія. 3-е изд. М. 1909 г. Ц. 15 к. 2-е изд. допущ. Уч. Ком. М. Н. Пр. къ классн. употребл.

— „Дружокъ". Годъ I. Первая послѣ азбуки книга для чтенія. 3-е изд. М. 1909 г. Ц. 20 к. Допущ. Уч. Ком. М. Н. Пр. къ классному употребленію.

— „Дружокъ". Годъ II. Вторая книжка послѣ азбуки для русскаго и церковнославянскаго чтенія. Изд. 2-е. М. 1908 г. Ц. 35 к.

Покровскій, Н. Какъ росло и строилось Русское государство. Разсказы изъ русской исторіи. Пособіе для учениковъ I и II класса гимназіи и ральныхъ училищъ. Ч. I, 1910 г. Ц. 75 коп., въ перепл. 90 коп. съ рисунками. Часть II. М. 1906 г. Ц. 60 коп., въ перепл. 75 коп. Допущ. Учен. Ком. М. Н. Пр., какъ пособіе для младш. классовъ средн. учебн. заведеній.

Рождественскій, А., преподаватель Костромского реальнаго училища. Краткій очеркъ химическихъ явленій. Примѣнительно къ программѣ для реальныхъ училищъ. М. 1896 г. Ц. 40 к., въ перепл. 55 к. Одобр. Уч. Ком. Мин. Нар. Просв.

Соколовъ, Аѳ. Азбука русская и церк.-слав., съ письмен. самостоят. упражн. учениковъ при изученіи каждой буквы. Изд. 4-е. М. 1904 г. Ц. 15 к. Допущ. Уч. Ком. М. Н. Пр., какъ учебное руков. для низш. училищъ.

— Методическое руководство къ „Азбукѣ русской и церковно-славянской" въ подробныхъ примѣрныхъ урокахъ. Изданіе 4-е. М. 1904 г. Ц. 30 к. Допущено въ библіотеки низшихъ училищъ.

— Объяснительный словарь церковно-славянскаго языка, съ самостоятельными упражненіями учениковъ въ заучиваніи церковно-славянскихъ словъ. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. М. 1901 г. Ц. 10 к. Допущ. Уч. К. М. Н. Пр. къ классному употребленію въ низшихъ училищахъ.

— Письменныя упражненія по Закону Божію въ начал. школѣ. Священ. исторія Новаго Завѣта и молитвы. Книжка 1-я для учащихся. М. 1904 г. Ц. 10 к.

— Письменныя упражненія по Закону Божію въ начальной школѣ, методическія замѣтки для преподавателя Закона Божія. М. 1904 г. Ц. 10 к.

— Сборникъ диктантовъ. Дополнительная книжка къ методической грамматикѣ. Изд. 3-е. М. 1899 г. Ц. 20 к. Въ 3-мъ изд. эта книга Особ. Отд. Уч. Ком. М. Н. Пр. одобрена къ употребленію въ народныхъ школахъ въ качествѣ учебнаго пособія.

— Методическая грамматика. Элементарное руководство по русскому языку. Допущ. Ж. М. Н. Пр. 1902 г., № 3. Ц. 25 к.

— Уроки христіанскаго ученія. Концентрическій учебникъ для начальныхъ школъ. Допущ. Ж. Мин. Нар. Просв. 1882 г., № 2. Изд. 7-е. М. 1907 г. Ц. 30 к.

Ширяевъ. Элементарный атласъ діаграммъ цвѣтковыхъ растеній. Курсъ городскихъ училищъ. М. 1902 г. Ц. 75 к. Уч. Ком. М. Н. Пр. допущ. въ библ. средн. и низш. учебн. заведеній.

Ѳедоровъ. Первые уроки обученія грамотѣ по наглядно-звуковому методу. 1903 г. Ц. 20 к.
